КЛАССИЧЕСКАЯ УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА
ПО МАТЕМАТИКЕ

Б. П. ДЕМИДОВИЧ
В. П. МОДЕНОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издание третье,
стереотипное

Санкт-Петербург • Москва • Краснодар
2008

ББК 22.161.1
Д 30

Демидович Б. П., Моденов В. П.

Д 30 Дифференциальные уравнения: Учебное пособие. 3-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2008. — 288 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0677-7

Предлагаемая читателям книга состоит из двух частей: в первой части рассматриваются основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, во второй — дифференциальные уравнения с частными производными.

Учебное пособие предназначено для студентов технических вузов. Написанная ясным и простым языком, книга представляется полезной также лицам, занимающимся математикой самостоятельно.

ББК 22.161.1

Оформление обложки *С. ШАПИРО, А. ЛАПШИН*

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Предлагаемое читателям учебное пособие состоит из двух частей. В первой части рассматриваются основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, во второй — дифференциальные уравнения с частными производными.

Первая часть написана на основе курса лекций, читавшихся Б. П. Демидовичем в Военной Артиллерийской инженерной академии им. Ф. Э. Дзержинского (ныне Военная академия ракетных войск стратегического назначения им. Петра Великого). Ее содержание соответствует изложению за один семестр раздела «обыкновенные дифференциальные уравнения» курса высшей математики для технических вузов.

Материал первой части пособия представлен в четырех главах. В первой главе даются общие понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Во второй главе излагаются сведения об уравнениях первого порядка. Кроме детального разбора интегрируемых случаев, в ней затрагиваются элементы общей теории дифференциальных уравнений (особые точки, особые решения и др.). Третья глава посвящена подробному исследованию уравнений второго порядка. В четвертой главе рассматриваются уравнения высших порядков.

Автор второй части книги, В. П. Моденов написал ее на основе курса лекций, прочитанного Б. П. Демидовичем студентам химического факультета Московского Государственного университета им. М. В. Ломоносова. Ее материал соответствует изложению, также в течение одного семестра, раздела «дифференциальные уравнения с частными производными» из курса высшей математики для технических вузов.

Вторая часть пособия, как и первая, содержит четыре главы. В первой главе даются сведения об уравнениях в частных производных первого порядка. Вторая глава посвящена изложению необходимой далее теории рядов Фурье. В третьей главе подробно рассматривается классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка. В четвертой главе анализируются основные уравнения математической физики.

В книге приводится разбор характерных задач, содержатся упражнения для самостоятельного решения, снабженные необходимыми указаниями и ответами. В конце ее имеется список дополнительной литературы.

Издательство выражает признательность В. Б. Демидовичу и Н. П. Осмоловскому за помощь, оказанную при подготовке настоящего учебного пособия.

Книга рассчитана на студентов технических вузов. Написанная простым и ясным языком, она представляется также полезной лицам, занимающимся математикой самостоятельно.

ЧАСТЬ I ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Под *обыкновенным дифференциальным уравнением* (сокращённо, ОДУ) понимается равенство, содержащее независимую переменную, неизвестную функцию от этой переменной и её производные. Порядком старшей производной, входящей в состав уравнения, задаётся *порядок* ОДУ. Функцией, имеющей соответствующие производные и обращающей уравнение в тождество, определяется *решение* ОДУ. Процесс нахождения решений ОДУ обычно называют его *интегрированием*.

При изложении теории ОДУ основное внимание мы сосредоточим на случаях точного интегрирования таких уравнений.

Глава 1
ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

§ 1. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Математическое изучение закономерностей действительного мира часто приводит к уравнениям, связывающим неизвестные величины и производные этих величин. Такие уравнения называются *дифференциальными*.

Прежде чем переходить к точным определениям основных понятий, рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. Скорость распада радия в каждый текущий момент времени t пропорциональна его наличному количеству Q. Найти закон распада радия, если в начальный момент $t = 0$ имелось Q_0 радия.

Решение. Под скоростью распада радия понимается производная; поэтому согласно условию задачи имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ, \tag{1.1}$$

где k — известный коэффициент пропорциональности*, а знак "–" указывает на то, что с увеличением времени t величина Q убывает: $\frac{dQ}{dt}<0$. Кроме уравнения (1.1) имеем еще так называемое начальное условие:

$$Q = Q_0 \quad \text{при} \quad t = 0, \tag{1.2}$$

роль которого выяснится впоследствии.

Уравнение (1.1) легко может быть решено. А именно, разделив обе его части на Q, будем иметь

$$\frac{d(\ln Q)}{dt} = -k$$

или

$$\frac{d}{dt}(\ln Q + kt) = 0.$$

Отсюда

$$\ln Q + kt = \ln C,$$

где $\ln C$ — произвольная постоянная интегрирования в логарифмическом виде. Потенцируя последнее равенство, окончательно получим

$$Q = Ce^{-kt}. \tag{1.3}$$

Формула (1.3) представляет собой семейство функций от независимой переменной t, зависящее от произвольной постоянной C, причем каждая из этих функций удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.1). Такое решение называется *общим* и не дает конкретного ответа на вопрос задачи. Чтобы получить решение задачи, нужно определить значение постоянной C; это можно сделать, используя начальное условие (1.2). Полагая $t = 0$ в формуле (1.3), получим

$$Q_0 = C \cdot 1.$$

Отсюда

$$C = Q_0.$$

Подставляя это значение в формулу (1.3), найдем так называемое *частное решение*

$$Q = Q_0 e^{-kt}, \tag{1.4}$$

---

* А именно, k — физическая постоянная, выраженная обычно через период полураспада τ.

полностью решающее задачу. Геометрически это есть показательная кривая (рис. 1).

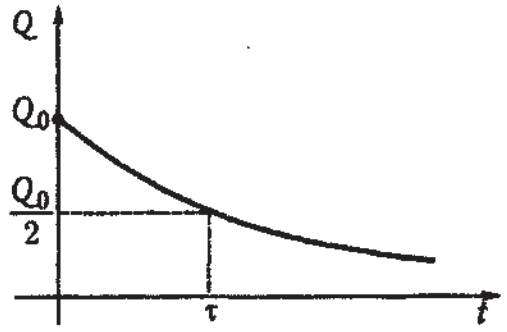

Рис. 1

Пример 2. Материальная точка массы m брошена вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Найти закон движения точки, пренебрегая сопротивлением воздуха.

Р е ш е н и е. Будем считать, что траектория точки есть ось Ox, направленная вертикально вверх, причем в начальный момент $t = 0$ точка находилась в начале координат. Единственная сила, действующая на нашу точку, есть сила тяжести, равная mg и направленная вертикально вниз. Применяя закон Ньютона, согласно которому произведение массы на ускорение равно действующей силе, получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g. \tag{1.5}$$

Начальные условия здесь записываются следующим образом:

$$\left(x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = v_0\right) \text{ при } t = 0. \tag{1.6}$$

Интегрируя уравнение (1.5) последовательно два раза, будем иметь

$$\frac{dx}{dt} = C_1 - gt \tag{1.7}$$

и

$$x = C_2 + C_1 t - \frac{gt^2}{2}. \tag{1.8}$$

Функция (1.8), зависящая в этом случае от двух произвольных постоянных C_1 и C_2, представляет собой так называемое *общее решение*

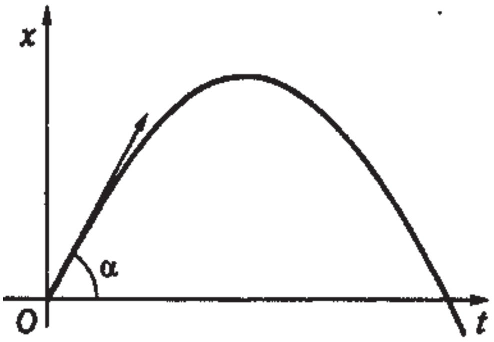

Рис. 2

уравнения (1.5). Из уравнений (1.7) и (1.8), используя начальные условия (1.6), имеем

$$C_1 = v_0, \ C_2 = 0;$$

отсюда, подставляя эти значения в формулу (1.8), получим *частное решение*

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

представляющее искомый закон движения материальной точки. Геометрически это есть парабола с осью параллельной оси ординат, касательная к которой в начале координат (рис. 2) образует угол $\alpha = \operatorname{arctg} v_0$.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Введем несколько определений.

Определение 1. Уравнение

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{1.9}$$

связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные (или дифференциалы) до n-го порядка включительно, называется обыкновенным *дифференциальным уравнением* n-го порядка.

Например:

$yy' + x = 0$ — дифференциальное уравнение 1-го порядка;

$y'' + y = 0$ — дифференциальное уравнение 2-го порядка и т. д.

Определение 2. Всякая функция $y = y(x)$, которая при ее подстановке в дифференциальное уравнение (1.9) обращает его в тождество, называется *решением* этого уравнения, а график этой функции называется *интегральной кривой*.

Уравнение

$$\Phi(x, y) = 0 \tag{1.10}$$

называется интегралом дифференциального уравнения (1.9), если каждая функция $y = y(x)$, определяемая уравнением (1.10) и имеющая непрерывные производные y', ..., $y^{(n)}$ до n-го порядка включительно, является решением данного дифференциального уравнения.

Обобщая понятие интегральной кривой, линию определяемую уравнением (1.10), будем по-прежнему называть *интегральной кривой* или *интегральной линией* дифференциального уравнения (1.9).

Разрешая уравнение (1.9), если это возможно, относительно старшей производной $y^{(n)}$, получим одно или несколько уравнений вида

$$y^{(n)} = f(x, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{1.11}$$

где f — известная функция. В дальнейшем мы будем изучать главным образом дифференциальные уравнения (1.11), разрешенные относительно старшей производной.

На примерах мы видели, что дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений. Чтобы выделить одно вполне определенное конкретное решение, кроме уравнения (1.11) нужно задать дополнительные условия, вытекающие из условий данной задачи. В простейшем случае ими являются так называемые *начальные условия*, состоящие в том, что при некотором значении $x = x_0$, задаются значения искомой функции y и ее последовательных производных $y', \ldots, y^{(n-1)}$. Тогда мы приходим в *задаче Коши*: найти решение у дифференциального уравнения (1.11), удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0', \ldots, \quad y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \tag{1.12}$$

где $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — некоторые определенные числа. Если эта задача для любой системы начальных условий имеет единственное решение, то говорят, что дифференциальное уравнение (1.11) обладает свойством единственности. Геометрически задача Коши состоит в нахождении интегральной кривой $y = y(x)$, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$, причем так, чтобы производные $y', \ldots, y^{(n-1)}$ принимали заданные значения.

Если порядок уравнения первый ($n = 1$), то требование о производных, естественно, отпадает.

Определение 3. Решение дифференциального уравнения (1.11)

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n), \tag{1.13}$$

содержащее n произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$,будем называть общим, если путем выбора этих постоянных можно получить решение, удовлетворяющее любым начальным условиям*.

Постоянные $C_1, \ldots, C_n$, обладающие этим свойством, назовем существенными. Поэтому коротко можно сказать, что общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется его решение, содержащее n существенных произвольных постоянных.

---

* Вообще говоря, в известной области.

Если выполнено свойство единственности, то общее решение представляет собой совокупность всех решений данного дифференциального уравнения, т. е. дает полное решение задачи.

Определение 4. Решение дифференциального уравнения (1.11), получающееся из общего (1.13) при некотором конкретном выборе произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$, называется *частным*.

Геометрически общее решение представляет собой семейство интегральных кривых, зависящее от n параметров (*поле интегральных кривых*), а частное решение — отдельную интегральную кривую, входящую в это семейство.

Если известно общее решение (1.13) дифференциального уравнения (1.11), то его частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям (1.12), мы получим, определяя произвольные постоянные $C_1, \ldots, C_n$ из системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \varphi(x_0, C_1, \ldots, C_n), \\ y_0' &= \varphi_x'(x_0, C_1, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_0^{(n-1)} &= \varphi_x^{(n-1)}(x_0, C_1, \ldots, C_n). \end{aligned}\right\} \qquad (1.14)$$

Пример. Найти решение дифференциального уравнения

$$y''' = 6x, \qquad (1.15)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 1, \quad y''|_{x=0} = -2.$$

Решение. Интегрируя обе части уравнения (1.15) последовательно три раза, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} y'' &= 3x^2 + C_1, \\ y' &= x^3 + C_1 x + C_2, \\ y &= \frac{x^4}{4} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3. \end{aligned}\right\} \qquad (1.16)$$

Полагая $x = 0$ в уравнениях (1.16), получим

$$-2 = C_1, \quad 1 = C_2, \quad 0 = C_3.$$

Отсюда

$$C_1 = -2, \quad C_2 = 1, \quad C_3 = 0$$

и, следовательно, искомое частное решение есть

$$y=\frac{1}{4}x^4-x^2+x.$$

Определение 5. Соотношение

$$\Phi(x, y, C_1, ..., C_n)=0 \tag{1.17}$$

называется *общим интегралом* дифференциального уравнения (1.11), если 1) при любом выборе произвольных постоянных $C_1, ..., C_n$ кривая, определяемая уравнением (1.17), является интегральной и 2) среди семейства (1.17) имеются интегральные кривые, удовлетворяющие произвольным начальным условиям.

Если дифференциальное уравнение дано в общем виде,

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)})=0, \tag{1.18}$$

то в простейшем случае это уравнение эквивалентно нескольким уравнениям вида (1.11). Тогда соотношение (1.17) будем называть общим интегралом дифференциального уравнения (1.18), если оно эквивалентно совокупности общих интегралов всех отдельных уравнений вида (1.11).

Геометрически общий интеграл (1.17) представляет собой n-параметрическое семейство интегральных кривых дифференциального уравнения (1.11), или соответственно (1.18).

Обратно, имея семейство кривых

$$\Psi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n)=0, \tag{1.19}$$

зависящее от n существенных параметров $C_1, C_2, ..., C_n$, путем дифференцирования получим еще n уравнений

$$\frac{d\Psi}{dx}=0, ..., \frac{d^n\Psi}{dx^n}=0. \tag{1.20}$$

Исключая из $n+1$ уравнений (1.19) и (1.20) n параметров C_1, C_2, ..., C_n, получим, вообще говоря*, дифференциальное уравнение n-го порядка, общим интегралом которого является данное семейство кривых (1.19).

Пример. Составить дифференциальное уравнение семейства прямых, проходящих через начало координат.

---

* Предполагается, что исключение параметров $C_1, C_2, ..., C_n$ не может быть произведено из частичной системы уравнений $\psi=0$, ... $\frac{d^k\psi}{dx^k}=0$ при $k<n$.

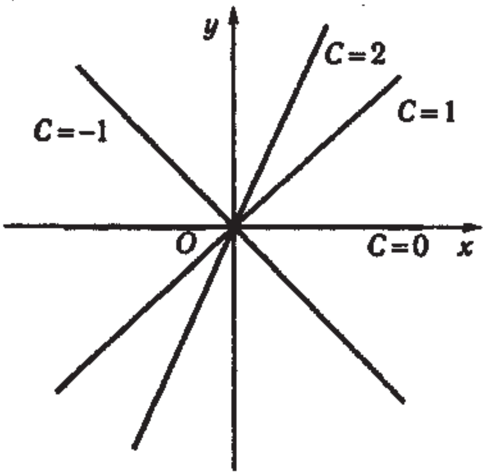

Рис. 3

Р е ш е н и е. Имеем (рис. 3)

$$y = Cx. \tag{1.21}$$

Дифференцируя равенство (1.21), находим

$$y' = C. \tag{1.22}$$

Исключая C из (1.21) и (1.22), получаем дифференциальное уравнение

$$xy' = y,$$

для которого семейство (1.21) является общим интегралом.

Задания для самостоятельного решения

1. Проверить, что для заданных дифференциальных уравнений следующие функции являются их решениями (C, C_1, C_2 — произвольные постоянные):

а) $yy' = x$, $y = \sqrt{x^2 + C}$;

б) $y'' - (k_1 + k_2)y' + k_1k_2y = 0$, $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$ (k_1, k_2 — постоянные);

в) $y'' + 2py' + p^2y = 0$, $y = e^{-px}(C_1 + C_2x)$ (p — постоянно);

г) $y'' + 2py' + (p^2 + q^2)y = 0$, $y = e^{-px}(C_1\cos qx + C_2\sin qx)$ (p, q — постоянны).

2. Составить дифференциальные уравнения заданных семейств кривых (C, C_1, C_2 — параметры):

а) $y = x + C$ (параллельные прямые);

б) $y = Cx^2$ (параболы);

в) $y = x^2 + C_1x + C_2$ (конгруентные параболы);

г) $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1$ (окружности единичного радиуса).

3. Зная общие решения дифференциальных уравнений, найти их частные решения $y = y(x)$, удовлетворяющие заданным начальным условиям, если

а) $y = Cx^2$, $y(2) = 3$;

б) $x^2 + 2y^2 = C$, $y(1) = 5$;

в) $y = e^x(C_1 + C_2x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

г) $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 10$.

Глава II
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Общий вид дифференциального уравнения 1-го порядка с неизвестной функцией $y = y(x)$, *неразрешенного относительно производной* y', следующий:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2.1}$$

где F — заданная функция. Разрешая уравнение (2.1), если это возможно, относительно аргумента y', получим дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной:

$$y' = f(x, y), \tag{2.2}$$

где f — некоторая известная функция. В общем случае, уравнение (2.1) эквивалентно нескольким уравнениям вида (2.2) (см. гл. II, § 12).

В уравнении (2.2) переменные x и y входят неравноправно: x — является независимой переменной, а y — функцией от x. При решении задач иногда удобно для дифференциального уравнения (2.2) пользоваться иной записью, в которой переменные равноправны. Полагая

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \text{и} \quad f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

(здесь учтено, что $f(x, y)$, вообще говоря, — есть дробная функция, и знак минус взят для удобства дальнейших выкладок), будем иметь симметрическую форму дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \tag{2.3}$$

Под решением этого уравнения понимается система функций

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

(t — параметр) таких, что

$$\{P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\}dt \equiv 0.$$

В частном случае за параметр может быть принята переменная x или переменная y.

Линии, соответствующие решениям уравнения (2.3), называются *интегральными кривыми* этого уравнения.

§ 2. ПОЛЕ НАПРАВЛЕНИЙ

Пусть в некоторой области G плоскости Oxy задано дифференциальное уравнение (2.2)

$$y' = f(x, y).$$

Это уравнение в каждой точке $M(x, y)$, принадлежащей области G, определяет, с точностью до поворота на 180°, направление касательной к искомой интегральной кривой, проходящей через точку M. Геометрически направление изображается небольшим отрезком прямой (черточкой), проведенным через точку M и наклоненным к оси Ox под углом α таким, что

$$\operatorname{tg}\alpha = f(x, y)$$

(рис. 4). Совокупность таких направлений носит название поля направлений дифференциального уравнения (2.2).

Расширяя поле направлений, мы будем считать направление в точке $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярным к оси Ox, если

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = \infty.$$

Интегральными кривыми дифференциального уравнения (2.2) являются те и только те линии, которые в каждой своей точке касаются соответствующего направления (рис. 4).

Геометрическое место точек плоскости, с одинаковым направлением поля, называется *изоклиной*. Очевидно, уравнение изоклины имеет вид

$$f(x, y) = k,$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$ — заданный наклон поля.

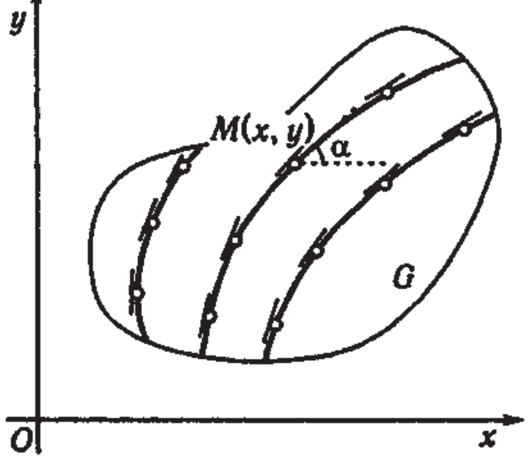

Рис. 4

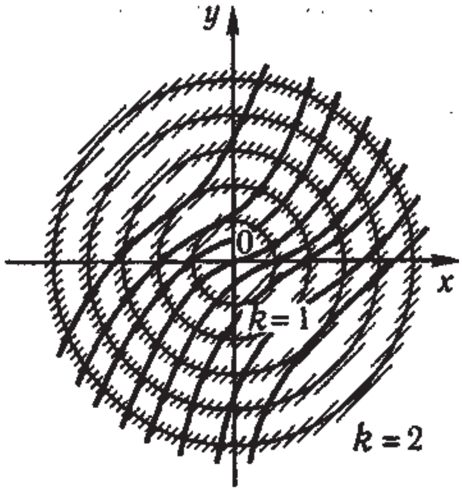

Рис. 5

Построив достаточно густую сеть изоклин, иногда удается составить примерное представление о поведении интегральных кривых дифференциального уравнения. Так, например, для уравнения

$$y' = \sqrt{x^2 + y^2}$$

изоклинами являются окружности $x^2 + y^2 = k^2$. Приблизительное расположение интегральных кривых показано на рис. 5.

Задания для самостоятельного решения

Построить изоклины, поле направлений и указать примерное расположение интегральных кривых для дифференциальных уравнений:

$$\text{а) } y' = 1 + y^2; \quad \text{б) } y' = x + y; \quad \text{в) } y' = xy - 1; \quad \text{г) } y' = \frac{x-y}{x+y}.$$

§ 3. ПОЛИГОНЫ ЭЙЛЕРА

Для приближенного построения интегральной кривой дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y),$$

проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$, эту кривую заменяют ломаной (полигон Эйлера), звенья которой имеют направления, принадлежащие полю направлений дифференциального уравнения (рис. 6).

Пусть $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ — последовательные вершины полигона Эйлера и

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

— приращения координат. Очевидно, имеем

$$\Delta y_i = \Delta x_i \operatorname{tg}\alpha_i$$

или, так как $\operatorname{tg}\alpha_i = f(x_i, y_i)$, то

$$\Delta y_i = \Delta x_i f(x_i, y_i) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Кроме того, $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$.

По этим расчетным формулам, задавая значения $x_1, x_2, \ldots$, можно последовательно определять $y_1, y_2, \ldots$. На практике точки значений x_i обычно берут равноотстоящими, считая $\Delta x_i = h = \text{const}$ (*шаг процесса*).

Тогда

$$\Delta y_i = h f(x_i, y_i).$$

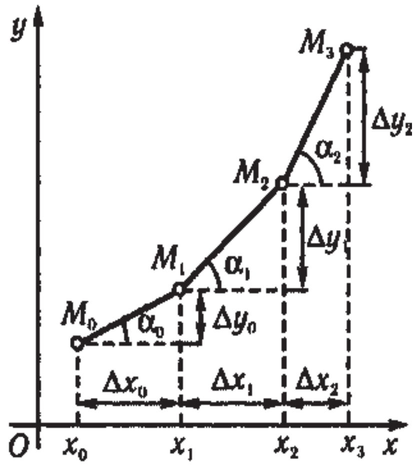

Рис. 6

Недостаток этого метода вычисления — систематическое накопление ошибок и вследствие этого — малая точность.

Пример. Для уравнения

$$y' = x + y$$

найти $y(2)$, если $y(1) = 1$.

Решение. Положим $h = 0{,}1$. Результаты вычислений с точностью до 0,001 даны в таблице.

i	x_i	y_i	Δy_i
0	1	1	0,2
1	1,1	1,2	0,23
2	1,2	1,43	0,263
3	1,3	1,693	0,299
4	1,4	1,992	0,339
5	1,5	2,331	0,383
6	1,6	2,714	0,431
7	1,7	3,145	0,485
8	1,8	3,630	0,543
9	1,9	4,173	0,607
10	2	<u>4,780</u>	

Для сравнения приводим точный ответ: $y(2) = 5{,}155$.

Упражнение. Методом Эйлера найти $y(1)$, если

$$y' = -\frac{y}{1+x} \quad \text{и} \quad y(0) = 2.$$

Улучшенный метод ломаных. Пусть

$$\Delta x_i = h \quad \text{и} \quad f_i = f(x_i, y_i).$$

Положим

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}, \quad y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f_i$$

и

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right).$$

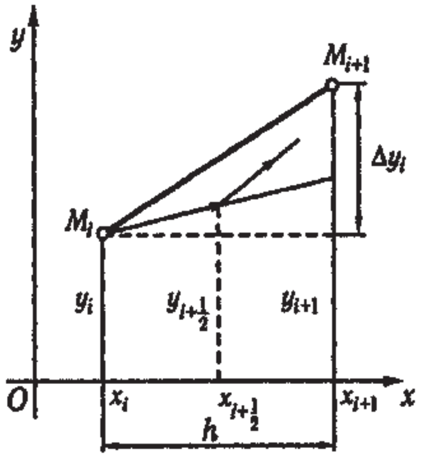

Рис. 7

В таком случае принимают

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$

где $\Delta y_i = h f_{i+\frac{1}{2}}$.

Уточнение здесь состоит в том, что в некоторой мере учитываются последующие значения направления поля (рис. 7).

Пример. Найти $y(1)$, если

$$y' = y - \frac{2x}{y}, \quad y(0) = 1.$$

Р е ш е н и е. Примем $h = 0{,}2$. Результаты вычислений даются в таблице ниже.

i	x_i	y_i	hf_i	$x_{i+\frac{1}{2}}$	$y_{i+\frac{1}{2}}$	Δy_i
0	0,0	1,0	0,2	0,1	1,1	0,184
1	0,2	1,184	0,169	0,3	1,268	0,159
2	0,4	1,343	0,149	0,5	1,417	0,142
3	0,6	1,485	0,135	0,7	1,553	0,130
4	0,8	1,615	0,124	0,9	1,678	0,121
5	1,0	1,736				

Точное решение задачи есть $y = \sqrt{2x+1}$; отсюда при $x = 1$ получаем $y = \sqrt{3} = 1{,}732$.

§ 4. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

Для дифференциального уравнения 1-го порядка (2.2)

$$y' = f(x, y)$$

задача Коши формулируется так: найти решение $y = y(x)$ данного уравнения (2. 2), удовлетворяющее заданному начальному условию

$$y(x_0) = y_0.$$

Геометрически это равносильно следующему: найти интегральную кривую дифференциального уравнения (2.2), проходящую через данную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Естественно возникает вопрос: при каких условиях задача Коши имеет решение и будет ли это решение единственным? Приведем без доказательства теорему существования и единственности решения, дающую ответ на поставленный вопрос.

Т е о р е м а. Если в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$

$$|x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b$$

выполнены следующие условия:

1) функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных x и y;

2) производная $f'_y(x, y)$ ограничена,

то существует решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (2.2), определенное на некотором отрезке

$$|x - x_0| \le h,$$

и удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, причем такое решение единственно.

Из сформулированной выше теоремы вовсе не следует, что соответствующее частное решение фактически может быть найдено с помощью конечного числа математических операций. Это удается сделать лишь в редких случаях. В следующих параграфах мы рассмотрим ряд таких интегрируемых случаев.

§ 5. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Дифференциальное уравнение первого порядка, допускающее приведение к виду

$$X(x)Y(y)dx + X_1(x)Y_1(y)dy = 0, \tag{2.4}$$

где $X(x)$, $X_1(x)$ — известные функции лишь переменной x, а $Y(y)$, $Y_1(y)$ — известные функции лишь переменной y, называется уравнением с разделяющимися переменными.

Для решения этого уравнения нужно произвести разделение переменных, т. е. преобразовать уравнение (2.4) так, чтобы при dx стоял бы множитель, зависящий только от x, а при dy стоял бы множитель, зависящий только от y. Для этого, очевидно, достаточно обе части уравнения (2.4) разделить на произведение $X_1(x)Y(y)$, после чего будем иметь

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \frac{Y_1(y)}{Y(y)}dy = 0.$$

Рассматривая для определенности в последнем равенстве y как функцию переменной x, получим

$$\left[\frac{X(x)}{X_1(x)} + \frac{Y_1(y)}{Y(y)}\cdot y'\right]dx = 0.$$

Отсюда, интегрируя по x, будем иметь

$$\int\left[\frac{X(x)}{X_1(x)} + \frac{Y_1(y)}{Y(y)}\cdot y'\right]dx = C$$

или

$$\int\frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \int\frac{Y_1(y)}{Y(y)}dy = C, \tag{2.5}$$

где C — произвольная постоянная*.

---

* Здесь, как и во многих местах в дальнейшем, под неопределенными интегралами понимаются некоторые первообразные функции.

Кроме решений, даваемых формулой (2.5), уравнение (2.4) допускает решения, обращающие в нуль произведение $X_1(x)Y(y)$, т. е. являющиеся корнями уравнений $X_1(x) = 0$, или $Y(y) = 0$. В самом деле, пусть $x = a$, где $X_1(a) = 0$, тогда $dx = 0$. Подставляя эту функцию в уравнение (2.4), получим

$$X(a)Y(y)\cdot 0 + X_1(a)Y_1(y)dy \equiv 0,$$

т. е. $x = a$ — есть решение уравнения (2.4). Аналогично можно показать, что функция $y = b$, где $Y(b) = 0$, является также решением уравнения (2.4). Геометрически эти решения, если они существуют, представляют собой прямые, параллельные осям координат.

Пример. Пусть

$$xdy - ydx = 0. \tag{2.6}$$

Р е ш е н и е. Разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части последнего равенства, будем иметь

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C_1,$$

где C_1 — положительная постоянная. Отсюда

$$|y| = C_1|x|$$

или

$$y = Cx, \tag{2.7}$$

где $C = \pm C_1$ — произвольная постоянная, которая может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Решениями данного дифференциального уравнения являются также функции

$$x = 0 \text{ и } y = 0.$$

Кстати сказать, последнее решение получается из общего решения (2.7) при $C = 0$. Геометрически совокупность решений уравнения (2.6) представляет собой пучок прямых линий, проходящих через начало координат (см. рис. 3).

Задания для самостоятельного решения

1. $\sin x \cdot dy = y\cos x \cdot dx$.

2. $(1 + y^2)\, dx = (1 + x^2)\, dy$.

3. $y' = e^{x+y}$.

4. Найти интегральную кривую уравнения $y' = \sqrt{y}$, проходящую через точку $M(2, 0)$.

§ 6. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Как известно, функция $f(x, y)$ называется *однородной измерения* α, если при любом значении t выполнено тождество

$$f(tx, ty) \equiv t^{\alpha} f(x, y). \tag{2.8}$$

В частности, многочлен

$$P(x, y) = \sum_{i,j} C_{ij} x^i y^j$$

представляет собой однородную функцию n-го измерения, если все члены его имеют одно и то же измерение, равное n, т. е. если

$$i + j = n.$$

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка

$$P(x, y)dx + Q(x, y)\,dy = 0 \tag{2.9}$$

называется *однородным*, если коэффициенты $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ при дифференциалах переменных x и y — суть однородные функции одного и того же измерения.

Пусть общее измерение однородности функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ равно α. Используя основное тождество (2.8), принимая $t = x$, будем иметь

$$P(x, y) = P\left(x \cdot 1, x\frac{y}{x}\right) = x^{\alpha} P\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

и

$$Q(x, y) = Q\left(x \cdot 1, x\frac{y}{x}\right) = x^{\alpha} Q\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Подставляя эти выражения в уравнение (2.8), после сокращения на x^{α} получим

$$P\left(1, \frac{y}{x}\right)dx + Q\left(1, \frac{y}{x}\right)dy = 0$$

или

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{2.10}$$

где $f\left(\frac{y}{x}\right) = -\dfrac{P\left(1, \frac{y}{x}\right)}{Q\left(1, \frac{y}{x}\right)}$ — однородная функция 0-го измерения. Таким образом, всякое однородное уравнение (2.9) может быть приведено к нормальной форме (2.10).

Для нахождения общего интеграла уравнения (2.10) положим

$$\frac{y}{x} = u, \tag{2.11}$$

отсюда

$$y = xu \tag{2.12}$$

и, следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u.$$

Делая соответствующую подстановку, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u.$$

Разделяя переменные, будем иметь

$$\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя почленно последнее равенство, получим общий интеграл

$$\int\frac{du}{f(u)-u} = \ln|Cx|, \tag{2.13}$$

где $u = \frac{y}{x}$, а произвольная постоянная взята в логарифмическом виде.

Из формулы (2.13) вытекает, что общий интеграл однородного уравнения (2.10) геометрически представляет собой семейство подобных кривых с центром подобия в начале координат. В самом деле, рассмотрим интегральную кривую

$$\int\frac{du_1}{f(u_1)-u_1} = \ln|x_1|, \tag{2.14}$$

соответствующую $C = 1$. Производя в уравнении (2.14) преобразование подобия

$$x_1 = Cx, \quad y_1 = Cy$$

и учитывая при этом, что

$$u_1 = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y}{x} = u,$$

получим, очевидно, произвольную кривую семейства (2.13).

Поэтому, чтобы построить поле интегральных кривых однородного уравнения, достаточно нарисовать одну интегральную кривую, соответствующую $C = 1$. а затем подобно преобразовать ее в соответствующем отношении (рис. 8).

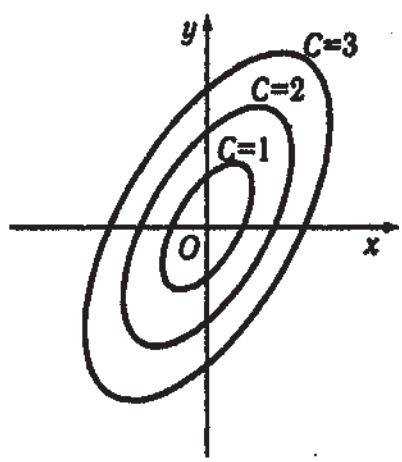

Рис. 8

При решении уравнения (2.10) нам пришлось делить на выражение $f(u) - u$. Поэтому интегральными кривыми этого уравнения будут также прямые $y=kx$, угловой коэффициент которых удовлетворяет уравнению $f(k)-k=0$. Кроме того, уравнение (2.9) может иметь еще решение $x=0$.

Замечание. Для решения однородного уравнения (2.9) мы предварительно приводили его к нормальному виду (2.10). На практике в этом нет необходимости, можно сразу пользоваться подстановкой $y=xu$.

Пример. Решить уравнение

$$(x+y)dx+(x-y)dy=0. \tag{2.15}$$

Решение. Уравнение однородно, так как, очевидно, $P=x+y$ и $Q=x-y$ — однородные функции 1-го измерения. Используя замечание, полагаем

$$y=xu \quad \text{и} \quad dy=xdu+udx.$$

Отсюда

$$(x+xu)dx+(x-xu)(xdu+udx)=0$$

или после очевидных сокращений

$$(1-u)xdu+(1+2u-u^2)dx=0.$$

Разделив переменные и интегрируя последовательно, будем иметь

$$\frac{(1-u)du}{1+2u-u^2}+\frac{dx}{x}=0$$

и

$$\int\frac{1-u}{1+2u-u^2}du+\int\frac{dx}{x}=C.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}\ln\left|1+2u-u^2\right|+\ln|x|=\ln C$$

или

$$x^2(1+2u-u^2)=C_1,$$

где $C_1=\pm C^2$. Подставляя вместо u его значение, получим общий интеграл

$$x^2+2xy-y^2=C_1. \tag{2.16}$$

Так как в процессе решения нам приходилось делить на выражение $1+2u-u^2$, то решениями уравнения (2.15) будут также прямые $y=kx$, где $1+2k-k^2=0$. В данном случае эти решения получаются из формулы (2.16) при $C_1=0$.

Геометрически общий интеграл (2. 16) представляет собой семейство гипербол, включая их две асимптоты $y = (1 \pm \sqrt{2})x$ (рис. 9).

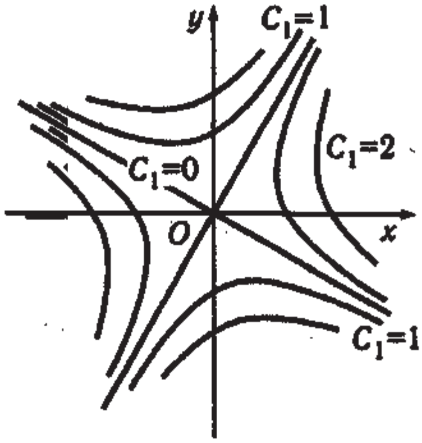

Рис. 9

Задания для самостоятельного решения

1. $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0.$
2. $xdx - (y + \sqrt{x^2 + y^2})dy = 0.$
3. $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}.$

§ 7. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определение. Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется *линейным*, если оно первой степени относительно неизвестной функции y и ее производной y' (или дифференциала dy) и не содержит произведения этих величин. В общем случае линейное уравнение имеет вид

$$\alpha(x)y' + \beta(x)y + \gamma(x) = 0, \tag{2.17}$$

где коэффициенты $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ — данные непрерывные функции в некотором промежутке $a < x < b$.

Предполагая, что $\alpha(x) \neq 0$, и вводя обозначения

$$p(x) = \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}, \quad q(x) = -\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)},$$

уравнение (2.17) можно привести к нормальному виду

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{2.18}$$

где функции $p(x)$ и $q(x)$ определены и непрерывны в интервале $a < x < b$.

Если $q(x) \equiv 0$, то линейное уравнение (2.18) называется однородным; в противном случае — неоднородным.

1. Однородное линейное уравнение. Рассмотрим *однородное* линейное уравнение

$$y' + p(x)y = 0 \tag{2.19}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y.$$

Очевидно, в этом уравнении можно разделить переменные. Предполагая $y \neq 0$, будем иметь

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Интегрируя последнее равенство, получим

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx$$

или

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C_1, \tag{2.20}$$

где C_1 — положительная произвольная постоянная. Потенцируя равенство (2.20), находим

$$|y| = C_1 e^{-\int p(x)dx}$$

или

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \tag{2.21}$$

где $C = \pm C_1$ — произвольная постоянная, которая может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Заметим, что при $C = 0$ получается решение $y = 0$ уравнения (2.19); поэтому C может принимать любое действительное значение и формула (2.21) дает общее решение этого уравнения.

Обозначая через

$$y_1 = C_1 e^{-\int p(x)dx}$$

решение уравнения (2.19), соответствующее $C = 1$, из формулы (2.21) будем иметь

$$y = Cy_1.$$

Следовательно, чтобы построить поле интегральных кривых уравнения (2.19), достаточно нарисовать график функции

$$y_1 = y_1(x) \quad (a < x < b),$$

а затем ординаты его изменить в соответствующем отношении (рис. 10).

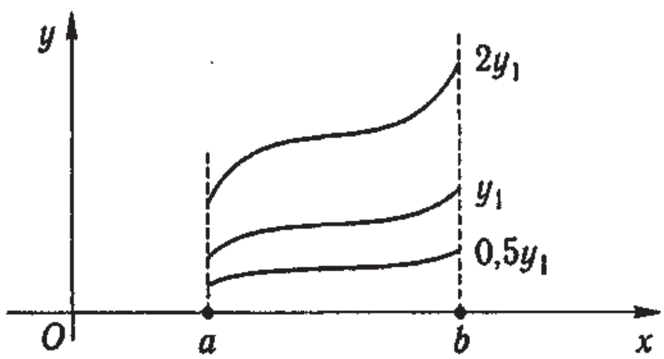

Рис. 10

2. Неоднородное линейное уравнение. Рассмотрим *неоднородное* линейное уравнение

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{2.23}$$

Будем искать решение этого уравнения в форме

$$y = C(x)y_1, \tag{2.24}$$

где $C(x)$ — новая неизвестная функция и $y_1 = y_1(x)$ — некоторое ненулевое решение соответствующего однородного уравнения

$$y_1' + p(x)y_1 = 0. \tag{2.25}$$

Используя формулу (2.21), можно положить

$$y_1 = e^{-\int p(x)dx}. \tag{2.26}$$

Заметим, что если в формуле (2.24) C считать постоянной, то эта формула дает общее решение линейного однородного уравнения (2.25). Мы же предполагаем, что $C = C(x)$ — есть некоторая функция переменной x, т. е. варьируем эту постоянную и тем самым добиваемся, чтобы функция y удовлетворяла неоднородному уравнению (2.23). Поэтому этот метод называется *«методом вариации произвольной постоянной»*.

Подставляя выражение (2.24) для y в исходное дифференциальное уравнение (2.23), будем иметь

$$C'(x)y_1 + C(x)y_1' + p(x)C(x)y_1 = q(x)$$

или

$$C'(x)y_1 + C(x)[y_1' + p(x)\, y_1] = q(x). \tag{2.27}$$

В силу формулы (2. 25) коэффициент при $C(x)$ в последнем уравнении равен 0. Поэтому это уравнение принимает вид

$$C'(x)y_1 = q(x),$$

отсюда

$$C'(x) = \frac{q(x)}{y_1}$$

и, следовательно,

$$C(x) = C_1 + \int \frac{q(x)}{y_1}dx, \tag{2.28}$$

где C_1 — произвольная постоянная.

На основании формулы (2.24) получаем, что общее решение неоднородного линейного уравнения (2.23) имеет вид

$$y = y_1\left[C_1 + \int \frac{q(x)}{y_1}dx\right] \tag{2.29}$$

или, подставляя сюда выражение (2.26) для y_1, окончательно будем иметь

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[C_1 + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]. \tag{2.30}$$

Таким образом, чтобы решить неоднородное линейное уравнение (2.23), нужно сначала найти общее решение соответствующего однородного линейного уравнения (2.25), а затем входящую в него произвольную постоянную, положить некоторой функцией от x, которую следует подобрать так, чтобы было удовлетворено неоднородное уравнение.

Из формулы (2.29) следует, что

$$y = C_1 y_1 + Y, \tag{2.31}$$

где $Y = Y(x)$ — некоторое частное решение неоднородного уравнения (2.23) (получается при $C_1 = 0$), т. е. y является линейной функцией произвольной постоянной C_1. Поэтому построение поля интегральных кривых неоднородного линейного уравнения будет такое же, как и в однородном случае, с той лишь разницей, что роль нулевой линии отсчета будет играть график функции $y = Y(x)$ (рис. 11).

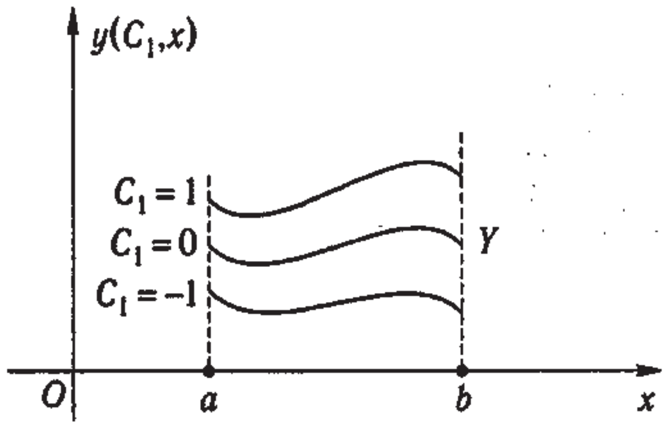

Рис. 11

Из способа построения следует, что через каждую точку $M_0(x_0, y_0)$ полосы $\{a < x < b, -\infty < y < +\infty\}$ проходит одна и только одна интегральная кривая.

З а м е ч а н и е. На практике метод вариации произвольной постоянной можно применять сразу для линейного уравнения (2.17).

Пример. Решить уравнение

$$(1+x^2)y'+xy=1. \tag{2.32}$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим сначала однородное уравнение

$$(1+x^2)y'+xy=0$$

или

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}+xy=0.$$

Разделяя переменные, будем иметь

$$\frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{1+x^2},$$

отсюда

$$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{xdx}{1+x^2},$$

то есть

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln\overline{C},$$

где $\overline{C}$ — положительная произвольная постоянная. Потенцируя последнее равенство, получим

$$y=\frac{C}{\sqrt{1+x^2}}, \tag{2.33}$$

где

$$C=\pm\overline{C}.$$

Согласно нашему методу в формуле (2.33) положим $C = C(x)$ и будем искать решение данного неоднородного уравнения (2.32) в виде

$$y=\frac{C(x)}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{2.34}$$

Подставляя это выражение в уравнение (2. 32), получим

$$(1+x^2)\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}C'(x)-\frac{xC(x)}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}+\frac{xC(x)}{\sqrt{1+x^2}}=1$$

или

$$\sqrt{1+x^2}\,C'(x)=1.$$

Заметим, что члены, содержащие $C(x)$, обязательно должны сократиться. Это служит контролем правильности выкладок.

Из последнего уравнения получаем

$$C'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

и, следовательно,

$$C(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная.

На основании формулы (2.34) окончательно имеем

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left[C_1 + \ln(x + \sqrt{1+x^2})\right].$$

Замечание. Из формулы (2.24) вытекает, что общий интеграл линейного неоднородного уравнения (2.23) можно искать в виде произведения двух функций

$$y = uv,$$

где одну из них, например функцию v, следует подобрать так, чтобы обратился в нуль коэффициент при другой функции, в данном случае при u, в преобразованном уравнении (сравни формулу (2.27)!). Не проделывая выкладок в общем виде, ограничимся рассмотрением примера.

Пример. Решить уравнение

$$(x+y)y' = 1.$$

Решение. По форме это уравнение не является линейным, так как оно содержит произведение искомой функции y и ее производной. Однако, если рассматривать x как функцию от y, то, учитывая, что

$$y' = \frac{1}{x'},$$

будем иметь линейное уравнение

$$x' = x + y. \tag{2.35}$$

Положим

$$x = uv \tag{2.36}$$

и, следовательно,

$$\frac{dx}{dy} = v\frac{du}{dy} + u\frac{dv}{dy}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (2.35), получим

$$v\frac{du}{dy} + u\frac{dv}{dy} = uv + y$$

или

$$v\frac{du}{dy} + \left(\frac{dv}{dy} - v\right)u = y. \tag{2.37}$$

Выберем функцию $v \neq 0$ так, чтобы обратился в нуль коэффициент при u; это дает

$$\frac{dv}{dy} - v = 0;$$

отсюда

$$\frac{dv}{v} = dy$$

и, следовательно,

$$\ln|v| = y \ln \overline{C},$$

то есть

$$v = Ce^{y},$$

где $C = \pm\overline{C}$ — произвольная постоянная. Так как нам требуется лишь одна конкретная функция v, то можно положить $C = 1$, и поэтому

$$v = e^{y}. \tag{2.38}$$

Подставив это выражение в формулу (2.37), получим

$$e^{y} \frac{du}{dy} = y,$$

отсюда

$$\frac{du}{dy} = ye^{-y}$$

и, следовательно,

$$u = \int ye^{-y} dy = -ye^{-y} - e^{-y} + C_1, \tag{2.39}$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Таким образом, на основании формул (2.36), (2.38) и (2.39) общее решение данного уравнения имеет вид

$$x = C_1 e^{y} - (y + 1).$$

Задания для самостоятельного решения.

1. $xy' + 2y = x^2$.

2. $(x^3 + y)dx - xdy = 0$.

3. $(x + y^2)y' = 1$.

4. Сила тока I в электрической цепи с омическим сопротивлением R и коэффициентом самоиндукции L удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V,$$

где V — напряжение тока. Найти силу тока через t секунд после включения, если V — постоянно и $I = I_0$ при $t = 0$.

§ 8. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

К линейным уравнениям легко сводятся *уравнения Бернулли*

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \qquad (2.40)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — данные непрерывные функции; α — любое действительное число.

Если $\alpha = 1$, то уравнение Бернулли (2.40) является линейным однородным и легко интегрируется.

При $\alpha \neq 1$, деля обе части уравнения (2.40) на y^{α}, будем иметь

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x). \qquad (2.41)$$

Положим

$$y^{1-\alpha} = z, \qquad (2.42)$$

тогда

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y' = z'$$

и, следовательно,

$$y^{-\alpha}y' = \frac{z'}{1-\alpha}. \qquad (2.43)$$

Подставляя выражения (2.42) и (2.43) в уравнение (2.41), получим линейное уравнение относительно z:

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x).$$

Найдя отсюда z, из формулы (2.42) определяем y.

Отметим также, что при $\alpha > 0$ уравнение (2.40) имеет очевидное решение $y = 0$.

З а м е ч а н и е. Так как уравнение Бернулли (2.40) преобразуется в линейное, то для его решения можно сразу использовать способы решения линейного уравнения, т. е. метод вариации произвольной постоянной или подстановку $y = uv$.

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$xy' + y = x^2y^2.$$

Р е ш е н и е. Очевидно, это уравнение Бернулли. Разделив обе части уравнения на y^2, будем иметь

$$x\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = x^2.$$

Полагая

$$\frac{1}{y} = z \quad \text{и} \quad -\frac{y'}{y^2} = z',$$

получим линейное уравнение

$$-xz' + z = x^2. \qquad (2.44)$$

Согласно методу вариации произвольной постоянной решаем сначала однородное уравнение

$$-x\frac{dz}{dx} + z = 0.$$

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}.$$

После интегрирования получим

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln\overline{C}$$

или

$$z = Cx, \qquad (2.45)$$

где $C = \pm\overline{C}$. Как обычно, будем считать, что $C = C(x)$ есть некоторая функция x. Подставляя выражение для z в уравнение (2.44), находим

$$-x(xC' + C) + Cx = x^2$$

или

$$C' = -1.$$

Поэтому

$$C = -x + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная. Далее, из формулы (2.45) получаем

$$z = -x^2 + C_1x.$$

Так как $z = \frac{1}{y}$, то окончательно имеем

$$y = \frac{1}{C_1x - x^2}.$$

Кроме того, наше уравнение имеет еще решение $y = 0$, формально соответствующее значению $C_1 = \infty$.

Задания для самостоятельного решения

1. $y^2y' - xy^3 = x^3.$
2. $xy' - y = x^2\sqrt{y}.$
3. $(xy + x^2y^3)y' = 1.$

§ 9. УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Пусть левая часть дифференциального уравнения

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{2.46}$$

является полным дифференциалом некоторой функции $z = z(x, y)$, т. е.

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dz. \tag{2.47}$$

Как известно, необходимым и достаточным условием этого служит выполнение тождества

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{2.48}$$

В этом случае уравнение (2.46) называется уравнением в полных дифференциалах и решается весьма просто. А именно: в точках интегральной кривой одну из переменных x и y можно рассматривать как функцию другой*. Предполагая для определенности, что y есть функция от x, уравнение (2.46), в силу формулы (2.47), можно записать в виде равенства

$$dz(x, y) = 0,$$

где $z(x, y)$ — рассматривается как сложная функция от x, или

$$\frac{d}{dx}z(x, y) = 0.$$

Отсюда получаем общий интеграл уравнения (2.46)

$$z(x, y) = C, \tag{2.49}$$

где C — произвольная постоянная.

Геометрически общий интеграл (2.49) представляет собой семейство линий уровня поверхности $z = z(x, y)$.

Если выполнено условие полного дифференциала (2.48), то для нахождения функции z можно поступить следующим образом: из уравнения (2.47) имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = Q(x, y). \tag{2.50}$$

Отсюда, интегрируя первое равенство формулы (2.50), получим

$$z = \int P(x, y)dx + \varphi(y), \tag{2.51}$$

где $\varphi(y)$ — некоторая функция от y.

---

* Исключение составляют лишь точки (x, y), где выполнено условие $P(x, y) = Q(x, y) = 0$. Такие точки называются особыми для дифференциального уравнения (2.46) (подробнее см. § 16).

Используя второе равенство формулы (2.50), будем иметь

$$\varphi'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)dx \equiv R(x, y).$$

При наличии равенства (2.48) функция $R(x, y)$ не зависит от x, так как

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)dx\right] =$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int P(x, y)dx\right] = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 0.$$

Поэтому $R(x, y) \equiv R(y)$. Последнее обстоятельство может служить контролем правильности выкладок. Следовательно,

$$\varphi'(y) = R(y)$$

и

$$\varphi(y) = \int R(y)dy + C_1.$$

Из формулы (2.51) окончательно имеем

$$z = \int P(x, y)dx + \int R(y)dy + C_1.$$

В последней формуле произвольная постоянная C_1 может быть пропущена, так как для получения общего интеграла (2.49) нам нужна хотя бы одна функция z, удовлетворяющая уравнению (2.47).

Пример. Решить уравнение

$$(2x - y)dx - (x - 2y)dy = 0. \qquad (2.52)$$

Решение. Здесь

$$P = 2x - y, \quad Q = -(x - 2y),$$

причем

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$$

и, следовательно, левая часть уравнения (2.52) является полным дифференциалом некоторой функции z, т. е.

$$(2x - y)dx - (x - 2y)dy = dz.$$

На основании последней формулы имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -(x - 2y). \qquad (2.53)$$

Интегрируя первое из равенств (2.53), находим

$$z = \int(2x - y)dx + \varphi(y) = x^2 - xy + \varphi(y).$$

Используя второе из равенств (2.53), будем иметь

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -(x - 2y) = -x + \varphi'(y).$$

Отсюда находим

$$\varphi'(y) = 2y$$

и

$$\varphi(y) = y^2 + C_1.$$

Следовательно,

$$z = x^2 - xy + y^2 + C_1.$$

Полагая $y = y(x)$, уравнение (2.52) можно записать в виде

$$dz(x, y) = 0.$$

Отсюда, приняв для простоты $C_1 = 0$, получаем общий интеграл этого уравнения

$$x^2 - xy + y^2 = C, \tag{2.54}$$

где C — произвольная постоянная.

Геометрически общий интеграл (2.54) есть семейство линий уровня эллиптического параболоида $z = x^2 - xy + y^2$ (рис. 12).

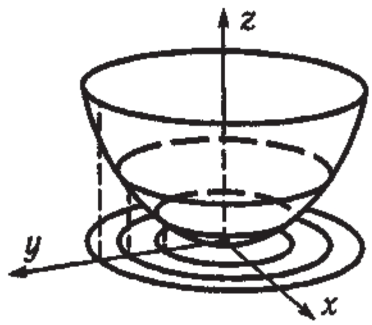

Рис. 12

З а м е ч а н и е. На практике уравнение в полных дифференциалах часто встречается в виде

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy,$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $P_1(x, y)$ и $Q_1(x, y)$ — заданные функции.

Если $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dz(x, y)$ и $P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy = dz_1(x, y)$, то общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$z(x, y) = z_1(x, y) + C.$$

Функции $z(x, y)$ и $z_1(x, y)$ находятся способом, указанным выше.

Задания для самостоятельного решения

1. $(x^2 - 2xy)dx - (x^2 + y^4)dy = 0.$
2. $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = dx.$

§ 10. ПОНЯТИЕ ОБ ИНТЕГРИРУЮЩЕМ МНОЖИТЕЛЕ

Определение. Интегрирующим множителем дифференциального уравнения

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{2.55}$$

называется не равная нулю функция $\mu(x, y)$, после умножения на которую левая часть уравнения обращается в полный дифференциал, то есть

$$\mu[P(x, y)dx + Q(x, y)dy] = dz, \tag{2.56}$$

где $z = x(x, y)$ — некоторая функция переменных x и y.

Используя условие полного дифференциала, получим, что функция μ удовлетворяет уравнению с частными производными

$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial y}.$$

Если для уравнения (2.55) интегрирующий множитель найден, то, считая для определенности $y = y(x)$ искомой функцией, получим, что это уравнение эквивалентно уравнению

$$\frac{d}{dx} z(x, y) = 0$$

и, следовательно, общий интеграл его есть

$$z(x, y) = C,$$

где функция $z = z(x, y)$ может быть легко определена (см. § 9). Однако в общем случае отыскивание интегрирующего множителя есть задача столь же трудная, как и решение самого дифференциального уравнения (2.55). Поэтому метод интегрирующего множителя не имеет большого практического значения.

Замечание. Если дифференциальное уравнение задано в виде

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy,$$

то, найдя общий интегрирующий множитель $\mu = \mu(x, y)$ для левой и правой части этого уравнения, т. е. считая μ функцией, удовлетворяющей условиям

$$\mu[P(x, y)dx + Q(x, y)dy] = dz$$

и

$$\mu[P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy] = dz_1,$$

где $z = z(x, y)$ и $z_1(x, y)$ — некоторые известные функции, для общего интеграла этого уравнения будем иметь следующее выражение:

$$z(x, y) = z_1(x, y) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

§ 11. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим линейное уравнение

$$y' + p(x)y = q(x)$$

или

$$dy + p(x)y\,dx = q(x)dx. \tag{2.57}$$

Общим интегрирующим множителем для левой и правой части уравнения, как легко непосредственно проверить, является функция

$$\mu = e^{\int p(x)dx}.$$

В самом деле, умножая уравнение (2.57) на μ, очевидно, имеем

$$e^{\int p(x)dx}dy + p(x)e^{\int p(x)dx}y\,dx = q(x)e^{\int p(x)dx}dx;$$

отсюда

$$d\left(ye^{\int p(x)dx}\right) = q(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Следовательно,

$$ye^{\int p(x)dx} = C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx,$$

где C — произвольная постоянная. Это наиболее практичный способ решения линейного уравнения.

Пример. Решить уравнение

$$y' - ay = f(x), \tag{2.58}$$

где a — постоянная величина.

Решение. Здесь

$$\mu = e^{-\int a\,dx} = e^{-ax}$$

или

$$d(ye^{-ax}) = e^{-ax} f(x) dx.$$

Отсюда

$$ye^{-ax} = C + \int e^{-ax} f(x) dx$$

и

$$y = e^{ax}[C + \int e^{-ax} f(x) dx]. \tag{2.59}$$

Этой формулой мы воспользуемся в дальнейшем.

§ 12. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае имеет вид

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2.60}$$

где F — известная функция. Уравнение (2.60) может содержать y' в любой степени и даже под знаком трансцендентной функции.

Рассмотрим сначала тот случай, когда уравнение (2.60) можно разрешить относительно y'. Предполагая, что число корней k конечно, мы получим k уравнений ($k \geq 1$)

$$y' = f_1(x, y), \; ..., \; y' = f_k(x, y). \tag{2.61}$$

Таким образом, здесь через каждую точку области G, в которой определены правые части уравнений (2.61), проходят, вообще говоря, k интегральных кривых.

Если

$$\Phi_1(x, y, C) = 0, \; \Phi_2(x, y, C) = 0, ..., \Phi_k(x, y, C) = 0$$

— общие интегралы уравнений (2.61), то общий интеграл уравнения (2.60) в области G может быть записан в следующем виде:

$$\Phi_1(x, y, C) \times \Phi_2(x, y, C) \times ... \times \Phi_k(x, y, C) = 0.$$

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$y'^2 - (x + y)y' + xy = 0. \tag{2.62}$$

Р е ш е н и е. Решая квадратное уравнение (2.62) относительно производной y', получим

$$y' = x, \quad y' = y.$$

Отсюда

$$y = \frac{x^2}{2} + C \quad \text{и} \quad y = Ce^x$$

и, следовательно, общий интеграл уравнения (2.62) есть

$$\left(y - \frac{x^2}{2} - C\right)(y - Ce^x) = 0. \tag{2.63}$$

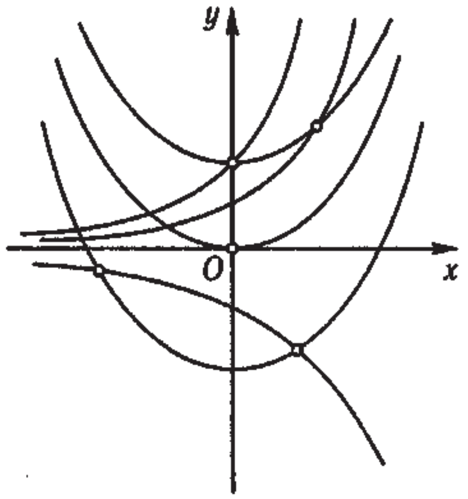

Рис. 13

Геометрически общий интеграл (2.63) представляет собой совокупность семейств парабол и показательных кривых (рис. 13).

§ 13. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ

Иногда удается получить решение общего уравнения первого порядка (2.60), выражая переменные x и y как функции некоторого параметра p.

Рассмотрим следующие два случая.

С л у ч а й 1. Пусть уравнение (2.60) разрешимо относительно x. Имеем

$$x = \varphi(y, y'). \tag{2.64}$$

Примем за параметр p величину y'. Тогда

$$x = \varphi(y, p). \tag{2.65}$$

Дифференцируя это уравнение по y и учитывая, что $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$, будем иметь

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{dp}{dy}.$$

Отсюда, рассматривая y как функцию параметра p, приходим к уравнению, разрешенному относительно производной от неизвестной функции

$$\frac{dy}{dp} = \frac{p\frac{\partial\varphi}{\partial p}}{1-p\frac{\partial\varphi}{\partial y}}. \tag{2.66}$$

Общее решение уравнения (2.66) имеет вид

$$y = \Theta(p, C), \tag{2.67}$$

где Θ — некоторая известная функция и C — проивольная постоянная. Чтобы получить x, нужно последнее выражение подставить в формулу (2.65).

Совокупность двух формул

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(\Theta(p, C), p) \\ y &= \Theta(p, C) \end{aligned}\right\} \tag{2.68}$$

дает общий интеграл уравнения (2.64) в параметрической форме. При фиксированном C получается отдельная интегральная кривая, которую можно построить по точкам, давая p различные значения, причем в каждой точке этой кривой p равно угловому коэффициенту касательной. Исключая параметр p из системы (2.68), получим общий интеграл уравнения (2.60) в обычном виде

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

В частном случае, если уравнение (2.64) явным образом не зависит от y, будем иметь

$$x = \varphi(y').$$

Полагая $y' = \frac{dy}{dx} = p$, получим

$$x = \varphi(p). \tag{2.69}$$

Очевидно,

$$dy = pdx = p\varphi'(p)dp$$

и, следовательно,

$$y = \int p\varphi'(p)dp + C.$$

Совокупность формул для x и y дает общий интеграл уравнения (2.69) в параметрическом виде.

Пример. Решить уравнение

$$y'^2 - x + y = 0. \qquad (2.70)$$

Решение. Полагая $y' = p$ и разрешая уравнение (2.70) относительно x, будем иметь

$$x = p^2 + y. \qquad (2.71)$$

Дифференцируя последнее уравнение по y, получим

$$\frac{1}{p} = 2p\frac{dp}{dy} + 1.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dp} = \frac{2p^2}{1-p}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{2p^2}{1-p}dp = 2\int \frac{1-(1-p^2)}{1-p}dp = \\ &= 2\int \frac{dp}{1-p} - 2\int (1+p)dp = -2\ln|1-p| - \\ &- (2p + p^2) + C, \end{aligned} \qquad (2.72)$$

где C — произвольная постоянная.

Подставляя это выражение в формулу (2.71), будем иметь

$$x = -2p - 2\ln|1-p| + C. \qquad (2.73)$$

Совокупность формул (2.73) и (2.72) дает общий интеграл уравнения (2.70) в параметрическом виде. Из формулы (2.71) можно выразить p через x и y, а именно:

$$p = \pm\sqrt{x-y}.$$

Подставляя это выражение в формулу (2.72), получим общий интеграл уравнения (2.70) в обычной форме.

С л у ч а й 2. Пусть уравнение

$$F(x, y, y') = 0$$

разрешимо относительно y. В таком случае это уравнение можно записать в виде

$$y = \psi(x, y'), \tag{2.74}$$

где ψ — некоторая известная функция.

Принимая за параметр p величину y' получим

$$y = \psi(x, p). \tag{2.75}$$

Дифференцируя уравнение (2.75) по x, имеем

$$p = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial p}\frac{dp}{dx}; \tag{2.76}$$

отсюда находим

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial p}}{p - \dfrac{\partial\psi}{\partial x}}. \tag{2.77}$$

Мы получили разрешенное относительно производной $\frac{dx}{dp}$ уравнение для неизвестной функции x. Если это уравнение может быть решено (например, если оно относится к одному из известных типов), то его общее решение записывается в виде

$$x = \Theta(p, C), \tag{2.78}$$

где Θ — некоторая известная функция и C — произвольная постоянная.

Подставляя последнее выражение в формулу (2.75), получим

$$y = \psi(\Theta(p, C), p). \tag{2.79}$$

Совокупность формул (2.78) и (2.79) дает общий интеграл уравнения (2.74) в параметрическом виде.

В частном случае, если уравнение (2.74) явным образом не зависит от x, будем иметь

$$y = \psi(y'). \tag{2.80}$$

Полагая

$$p = y' = \frac{dy}{dx},$$

получим

$$y = \psi(p).$$

Очевидно,

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{\psi'(p)}{p}dp$$

и, следовательно,

$$x = \int \frac{\psi'(p)}{p}dp + C.$$

Совокупность формул для x и y дает общий интеграл уравнения (2.80) в параметрическом виде.

При нахождении общего интеграла уравнения (2.80) нам приходилось некоторое выражение делить на p. Полагая $p = 0$, получим очевидное решение $y = \psi(0)$, которое следует включить в состав общего интеграла (если $\psi(0)$ имеет смысл).

Пример. Решить уравнение

$$y = y' + y'^2 e^{y'}. \tag{2.81}$$

Решение. Полагая $y' = p$, получим

$$y = p + p^2 e^p. \tag{2.82}$$

Отсюда

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{1 + (p^2 + 2p)e^p}{p}dp$$

и, следовательно,

$$x = \int \frac{dp}{p} + \int (p + 2)e^p dp = \ln|p| + (p + 1)e^p + C. \tag{2.83}$$

Формулы (2.83) и (2.82) дают общий интеграл уравнения (2.81). Кроме того, на основе приведенных выше соображений общий интеграл нужно дополнить очевидным решением $y = 0$.

Замечание. Таким образом, общим приемом решения дифференциальных уравнений (2.64), (2.74), разрешенных соответственно относительно переменных x и y, является дифференцирование по другой переменной.

§ 14. УРАВНЕНИЕ ЛАГРАНЖА

Определение. *Уравнением Лагранжа* называется дифференциальное уравнение 1-го порядка, линейное (первой степени) относительно независимой переменной x и неизвестной функции y. Общий вид уравнения Лагранжа следующий:

$$\alpha(y')x + \beta(y')y + \gamma(y') = 0, \tag{2.84}$$

где $\alpha(y')$, $\beta(y')$, $\gamma(y')$ — некоторые известные функции от $y' = \frac{dy}{dx}$. Полагая $y' = p$, будем иметь

$$\alpha(p)x + \beta(p)y + \gamma(p) = 0. \tag{2.85}$$

Уравнение (2.85) легко может быть разрешено как относительно x, так и относительно y; поэтому для нахождения его общего интеграла, согласно предыдущему параграфу, можно использовать метод дифференцирования.

Рассмотрим ряд случаев, которые могут представиться.

Случай 1. Пусть $\beta(p) \not\equiv 0$. Разрешая уравнение (2.85) относительно y, будем иметь

$$y = \varphi(p)x + \psi(p), \tag{2.86}$$

где

$$\varphi(p) = -\frac{\alpha(p)}{\beta(p)}, \quad \psi(p) = -\frac{\gamma(p)}{\beta(p)}.$$

Функции $\varphi(p)$, $\psi(p)$ предполагаются непрерывными и имеющими непрерывные производные $\varphi'(p)$ и $\psi'(p)$.

Дифференцируя уравнение (2.86) по переменной x и учитывая, что $\frac{dy}{dx} = p$, получим

$$p = \varphi(p) + [\varphi'(p)x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}. \tag{2.87}$$

Рассматривая x как функцию параметра p, уравнение (2.87) можно записать в следующем виде:

$$[p - \varphi(p)]\frac{dx}{dp} = \varphi'(p)x + \psi'(p). \tag{2.88}$$

Отсюда легко усмотреть, что это уравнение является *линейным* относительно переменной x.

Если $p - \varphi(p) \not\equiv 0$, то общее решение уравнения (2.88) может быть найдено обычными методами и имеет вид

$$x = \xi_1(p) + C\xi_2(p), \tag{2.89}$$

где $\xi_1(p)$, $\xi_2(p)$ — известные функции и C — произвольная постоянная.

Подставляя выражение для x в уравнение (2.86), получим

$$y = \eta_1(p) + C\eta_2(p), \tag{2.90}$$

где $\eta_1(p) = \varphi(p)\xi_1(p) + \psi(p)$ и $\eta_2(p) = \varphi(p)\xi_2(p)$. Совокупность формул (2.89) и (2.90), вообще говоря, дает общий интеграл уравнения Лагранжа (2.85) в параметрической форме.

Если $p - \varphi(p) \equiv 0$, то решение уравнения (2.88) получается без всяких квадратур. Этот исключительный случай мы подробно рассмотрим в следующем параграфе.

Случай 2. Пусть $\alpha(p) \not\equiv 0$, $\beta(p) \equiv 0$.

Уравнение (2.85) имеет вид

$$\alpha(p)x + \gamma(p) = 0 \tag{2.91}$$

или

$$x = \varphi(p), \tag{2.92}$$

где $\varphi(p) = -\frac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$. Это уравнение было рассмотрено в § 13 (см. формулу 2.69).

Так как $dy = pdx = p\varphi'(p)dp$, то

$$y = \int p\varphi'(p)dp + C. \tag{2.93}$$

Случай 3. Пусть $\alpha(p) \equiv 0$, $\beta(p) \equiv 0$, $\gamma(p) \not\equiv 0$. Уравнение (2.85) имеет вид

$$\gamma(p) = 0. \tag{2.94}$$

Пусть $p = k$ — корень уравнения (2.94), т. е.

$$\gamma(k) = 0. \tag{2.95}$$

Так как $\frac{dy}{dx} = k$, то, интегрируя, будем иметь

$$y = kx + C,$$

где C — произвольная постоянная. Отсюда

$$k = \frac{y - C}{x}.$$

Подставляя последнее выражение в равенство (2.95), получим общий интеграл дифференциального уравнения (2.94)

$$\gamma\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0.$$

Пример. Решить уравнение

$$xy'^3 - yy' - 1 = 0. \tag{2.96}$$

Р е ш е н и е. Полагая $y' = p$ и разрешая уравнение (2.96) относительно y, получим

$$y = p^2 x - \frac{1}{p}. \tag{2.97}$$

Дифференцируя по x последнее уравнение, будем иметь

$$p = p^2 + 2px\frac{dp}{dx} + \frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx};$$

отсюда

$$\frac{dx}{dp} = \frac{2x}{1-p} + \frac{1}{p^3(1-p)}. \tag{2.98}$$

Применяя к линейному уравнению (2.98) метод вариации произвольной постоянной, последовательно находим

$$\frac{dx}{x} = \frac{2dp}{1-p}$$

и

$$x = \frac{C}{(1-p)^2}. \tag{2.99}$$

Варьируя произвольную постоянную C и подставляя выражение для x и $\frac{dx}{dp}$ в уравнение (2.98), будем иметь

$$\frac{1}{(1-p)^2}\frac{dC}{dp} + \frac{2C}{(1-p)^3} = \frac{2C}{(1-p)^2} + \frac{1}{p^3(1-p)};$$

отсюда

$$\frac{dC}{dp} = \frac{1-p}{p^3}$$

и

$$C = -\frac{1}{2p^2} + \frac{1}{p} + \frac{C_1}{2},$$

где C_1 — произвольная постоянная. Подставляя это выражение в формулы (2.99) и (2.97), окончательно получим

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{-1+2p+C_1p^2}{2p^2(1-p)^2}, \\ y &= \frac{-1+2p+C_1p^2}{2(1-p)^2} - \frac{1}{p}. \end{aligned}\right\}$$

§ 15. УРАВНЕНИЕ КЛЕРО

Рассмотрим тот исключительный случай уравнения Лагранжа

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \tag{2.100}$$

когда имеет место тождество

$$\varphi(y') \equiv y'.$$

Этот частный вид уравнения

$$y = xy' + \psi(y') \tag{2.101}$$

носит название *уравнения Клеро*. Вводя обычное обозначение $y' = p$, уравнение Клеро можно записать в виде

$$y = px + \psi(p). \tag{2.102}$$

Относительно функции $\psi(p)$ мы будем предполагать, что она непрерывна вместе со своими производными $\psi'(p)$ и $\psi''(p)$.

Для решения уравнения, как и в общем случае, применим метод дифференцирования. Дифференцируя обе части уравнение (2.102) по переменной x, получим

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx};$$

отсюда

$$\frac{dp}{dx}[x + \psi'(p)] = 0. \tag{2.103}$$

Приравнивая нулю первый множитель в формуле (2.103), получим

$$\frac{dp}{dx} = 0$$

и, следовательно,

$$p = C,$$

где C — произвольная постоянная.

Из уравнения (2.102) находим общее решение уравнения Клеро

$$y = Cx + \psi(C), \tag{2.104}$$

геометрически представляющее собой семейство прямых линий.

Приравняем теперь нулю второй множитель в формуле (2.103). Это дает нам уравнение некоторой кривой (Г):

$$\left.\begin{aligned} x &= -\psi'(p), \\ y &= -p\psi'(p) + \psi(p). \end{aligned}\right\} \tag{2.105}$$

Эта кривая является интегральной во всех точках, где

$$\psi''(p) \neq 0,$$

так как

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\psi'(p)-p\psi''(p)+\psi'(p)}{-\psi''(p)} = p.$$

Система уравнений (2.105) дает *особое решение* уравнения Клеро (подробнее об особых решениях см. § 17). Так как через каждую точку (x, y) кривой Г, отвечающую значению параметра $p = y' = C$, проходит также прямая (2.104) с угловым коэффициентом C, то кривая Г касается всех этих прямых. Следовательно, геометрически особое решение (2.105) представляет собой огибающую семейства прямых (2.104).

Пример. Решить уравнение Клеро

$$y = xy' + a\sqrt{1+y'^2} \quad (a>0).$$

Решение. Полагая $y' = p$, получим

$$y = px + a\sqrt{1+p^2}. \tag{2.106}$$

Дифференцируя последнее уравнение, будем иметь

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}\frac{dp}{dx},$$

откуда находим

$$\frac{dp}{dx}\left(x + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0. \tag{2.107}$$

Если $\frac{dp}{dx} = 0$, то $p = C$ и, следовательно,

$$y = Cx + a\sqrt{1+C^2}. \tag{2.108}$$

Это общее решение, согласно общей теории, мы могли написать сразу, заменив в уравнении (2.106) p на C.

Приравнивая нулю второй множитель в формуле (2.107) и подставляя выражение для x в уравнение (2.105), получим особое решение

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}, \\ y &= \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{2.109}$$

Чтобы выяснить, что это за кривая, исключим параметр p. Возводя уравнение (2.109) в квадрат и складывая, получим

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{2.110}$$

Отсюда ясно, что это окружность с центром в начале координат, радиуса a (точнее это верхняя часть окружности, так как из (2.109) следует, что $y > 0$). Прямые (2.108), очевидно, касаются этой окружности (рис. 14).

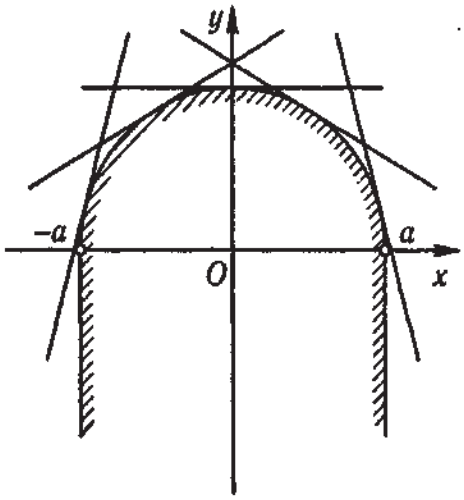

Рис. 14

В заштрихованной части рисунка дифференциальное уравнение не определено.

Задания для самостоятельного решения

1. $y = xy' + \cos y'$.
2. $y = y'(x - y' + y'^2)$.
3. $6xy'^2 - 6yy' - 3y'^3 = 2$.
4. $y = xy' + y'^2$.

§ 16. ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Рассмотрим поле интегральных кривых дифференциального уравнения

$$P(x, y)dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{2.111}$$

заполняющее некоторую область G с границей Γ (рис. 15).

Определение. Точка $M(x, y)$ области G называется *обыкновенной* для дифференциального уравнения (2.111), если через эту точку в некоторой ее окрестности U проходит одна и только одна интегральная кривая (рис. 15). Всякую точку N области G, не являющуюся обыкновенной, или принадлежащую границе Γ области G, мы будем называть особой для дифференциального уравнения (2.111). Через особую точку или совсем не проходит ни одна интегральная кривая, или же проходит несколько интегральных кривых (возможно бесконечное множество).

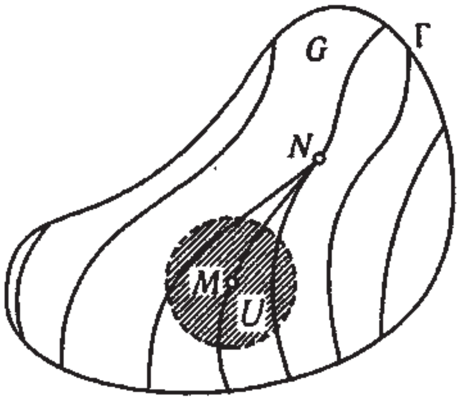

Рис. 15

В частном случае, если дифференциальное уравнение имеет вид

$$y' = f(x, y), \tag{2.112}$$

где функция $f(x, y)$ определена в области G, то из теоремы существования и единственности решений (§ 4) получаем следующий результат: если в некоторой окрестности точки M области G правая часть $f(x, y)$ уравнения (2.112) непрерывна и имеет ограниченную производную $f'_y(x, y)$, то точка M заведомо обыкновенная для этого уравнения.

Как следствие, имеем такое утверждение: внутренняя точка N области G может быть особой для дифференциального уравнения (2.112) только в том случае, если 1) функция $f(x, y)$ терпит разрыв в точке N, или в любой ее окрестности; или же 2) функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки N, но ее производная $f'_y(x, y)$ неограничена в любой окрестности этой точки*.

Аналогичные формулировки получаются для уравнения вида

$$x' = g(x, y). \tag{2.113}$$

Возвращаясь к уравнению (2.111), предположим, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в области G. Если в некоторой точке $M(x, y)$ области G выполнено условие $P(x, y) \neq 0$ или же $Q(x, y) \neq 0$, то уравнение (2.111) в окрестности этой точки может быть приведено к виду (2.112) (или, соответственно, к виду (2.113) и, следовательно, в наших предположениях эта точка является обыкновенной).

---

* Эти точки являются «подозрительными» в нашем смысле; чтобы разобраться в их природе, требуется дополнительное исследование.

Таким образом, особые точки дифференциального уравнения (2.111) удовлетворяют системе уравнений

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0. \tag{2.114}$$

Пример. Определить особые точки дифференциального уравнения

$$2ydx - xdy = 0. \tag{2.115}$$

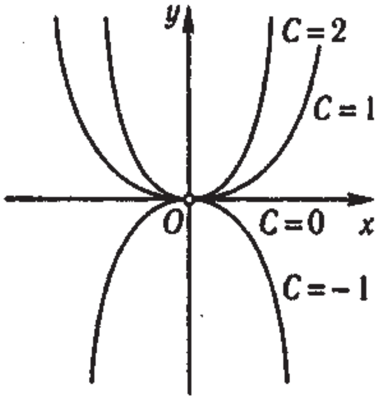

Рис. 16

Решение. Очевидно, единственной особой точкой уравнения (2.115) может быть только

$$x = 0, \quad y = 0.$$

Непосредственным интегрированием убеждаемся, что общее решение уравнения (2.115) есть

$$y = Cx^2$$

и, следовательно, через точку $O(0, 0)$ проходит бесчисленное множество интегральных кривых [(парабол) (рис. 16)]. Такая особая точка называется *узлом*.

В случае, если дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0,$$

не разрешенный относительно производной y', то оно эквивалентно нескольким (допустим k) уравнениям вида

$$y' = f_1(x, y), \; \dots, \; y' = f_k(x, y),$$

определенных в некоторой области G.

Следовательно, здесь, как правило, через каждую точку M (x, y) области G проходит k интегральных кривых, имеющих, вообще говоря, различные направления. В этом случае точка N области G называется особой только тогда, когда по одному и тому же направлению проходит несколько интегральных кривых.

Упражнение. Определить особые точки дифференциального уравнения

$$y' = \frac{2x - y - x^2}{x - 2y + xy}.$$

§ 17. ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ

Определение. Решение дифференциального уравнения первого порядка

$$F(x, y, y') = 0 \tag{2.116}$$

называется особым, если в любой его точке нарушается свойство единственности, т. е. через каждую точку $M(x, y)$ особого решения по некоторому допустимому направлению $\operatorname{tg}\alpha = y'$, определяемому заданным дифференциальным уравнением (2.116), проходит несколько интегральных кривых (рис. 17).

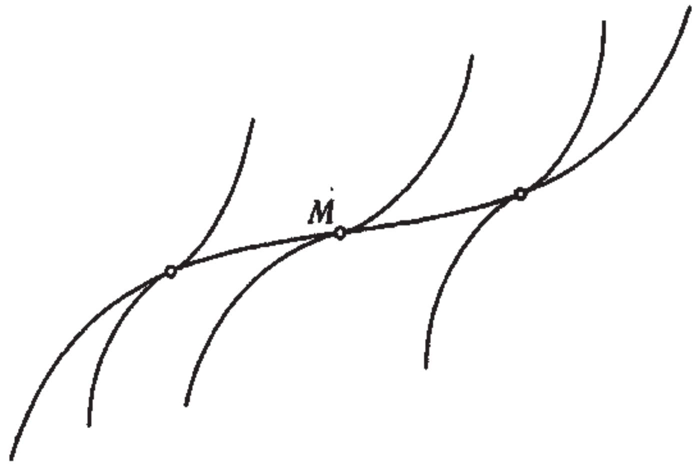

Рис. 17

Так как особое решение в каждой своей точке касается какой-то другой интегральной кривой, то геометрически оно представляет собой огибающую некоторого семейства интегральных кривых. Обратно, если мы имеем некоторое семейство интегральных кривых уравнений (1.116)

$$\Psi(x, y, C) = 0, \tag{2.117}$$

то огибающая K этого семейства обязательно является особым решением. В самом деле, огибающая K является прежде всего интегральной кривой дифференциального уравнения (2.116), так как в каждой своей точке $M(x, y)$ она касается одной из интегральных кривых семейства (2.117) и, следовательно, имеет с ней общее значение y', удовлетворяющее дифференциальному уравнению (2.116). Кроме того, в каждой точке огибающей, очевидно, нарушено свойство единственности.

Таким образом, разыскивание особых решений дифференциального уравнения (2.116) сводится к нахождению огибающих некоторых семейств интегральных кривых этого уравнения.

Пусть известен общий интеграл

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{2.118}$$

дифференциального уравнения (2.116). Как известно из курса математического анализа, огибающая семейства кривых (2.118) удовлетворяет системе уравнений

$$\Phi(x, y, C) = 0, \ \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0 \tag{2.119}$$

и заведомо существует, если $\Phi'_y(x, y, C) \neq 0$ для всех значений x, y, C, подчиненных условиям (2.119). Исключая из системы (2.119) параметр C, получим уравнение некоторой линии

$$D_C(x, y) = 0, \qquad (2.120)$$

носящей название C-дискриминантной кривой дифференциального уравнения (2.116). Это кривая, кроме огибающей, если последняя существует, может содержать еще геометрическое место особых точек интегральных кривых (точек возврата, двойных точек и т. п.).

Поэтому, чтобы найти особое решение дифференциального уравнения (2.116), нужно: 1) определить все однозначные ветки $y = \psi(x)$, входящие в состав C-дискриминантной кривой; 2) среди них отобрать те, которые удовлетворяют заданному дифференциальному уравнению (2.116), что можно обнаружить непосредственной проверкой. Кроме того, особыми решениями могут быть также участки граничной кривой Г области G задания дифференциального уравнения (2.116).

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = y^{\frac{2}{3}}. \qquad (2.121)$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$y = \left(\frac{x - C}{3}\right)^3. \qquad (2.122)$$

Составляя уравнение C-дискриминантной кривой, получим систему

$$y = \left(\frac{x - C}{3}\right)^3, \quad \left(\frac{x - C}{3}\right)^2 = 0.$$

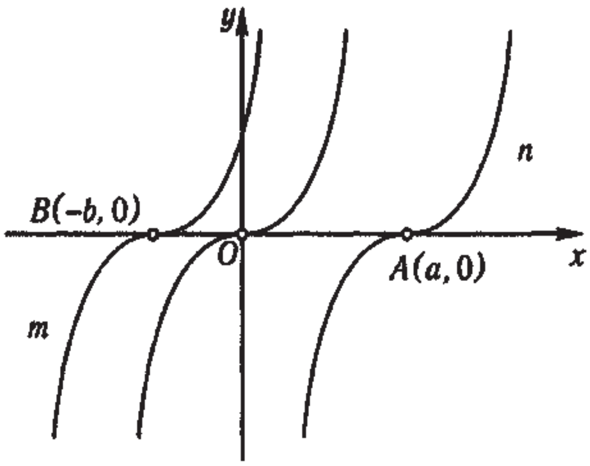

Рис. 18

Отсюда $y = 0$. Непосредственно видно, что эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.121) и, следовательно, является его особым решением. Геометрически кривая $y = 0$ (ось Ox) представляет собой огибающую семейства кубических парабол (2.122) (рис. 18). Заметим, что через каждую точку особого решения $y = 0$ проходит бесконечное множество интегральных кривых; например, через точку $O(0, 0)$ проходят следующие интегральные кривые: *а*) прямая $y=0$; *б*) кубическая парабола $y=\left(\frac{x}{3}\right)^3$; *в*) составные кривые $mBAn$, где $y=\left(\frac{x+b}{3}\right)^3$ при $-\infty<x<-b$, $y=0$ при $-b\le x\le a$, $y=\left(\frac{x-a}{3}\right)^3$ при $a<x<+\infty$, причем $a>0$ и $b>0$ — произвольны.

Пример 2. Пусть

$$yy'^2=1. \tag{2.123}$$

Тогда

$$\sqrt{y}y'=\pm 1.$$

Интегрируя это уравнение, получим общий интеграл

$$y^{\frac{3}{2}}=\pm\frac{3}{2}(x-C)$$

или

$$y^3=\left[\frac{3}{2}(x-C)\right]^2. \tag{2.124}$$

C-дискриминантная кривая имеет вид

$$y^3=\left[\frac{3}{2}(x-C)\right]^2,\quad 0=3(x-C),$$

откуда находим

$$y=0. \tag{2.125}$$

Эта кривая, очевидно, не является интегральной (а следовательно, не является особым решением) и представляет собой геометрическое место особых точек (точек возврата) парабол (2.124) (рис. 19).

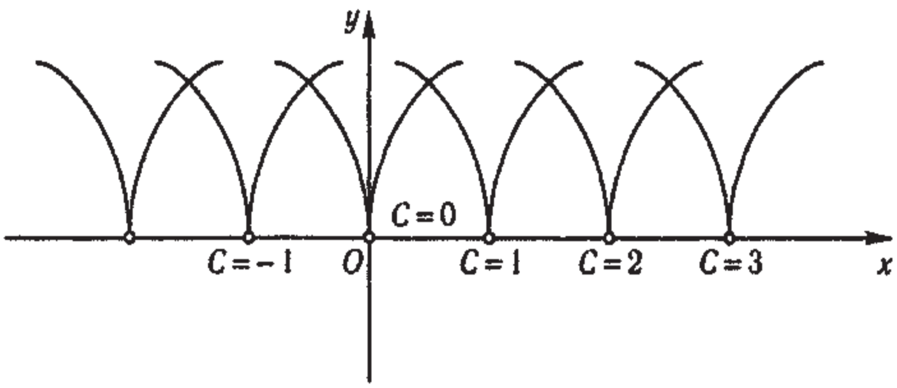

Рис. 19

Укажем еще один метод разыскания особых решений. Пусть дифференциальное уравнение имеет вид

$$F(x, y, p)=0, \tag{2.126}$$

где $p = y'$, причем F'_y, F'_p — непрерывны. Предполагая, что уравнение (2.126) может быть разрешено относительно производной p, получим одно или несколько уравнений вида

$$p = f(x, y),$$

где функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области G. В силу теоремы существования и единственности решений (§ 4) в каждой точке области G, в которой существует непрерывная производная $f'_y(x, y)$, заведомо имеет место свойство единственности и, следовательно, эта точка не может принадлежать особому решению дифференциального уравнения (2.126). Таким образом, особое решение состоит только из тех точек, где производная $f'_y(x, y)$ или терпит разрыв, или не существует.

Очевидно,

$$F[x, y, f(x, y)] \equiv 0.$$

Дифференцируя последнее тождество по y, получим

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial p} f'_y(x, y) = 0,$$

откуда

$$f'_y(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial p}}. \tag{2.127}$$

Если $\frac{\partial F}{\partial p} \neq 0$, то производная $f'_y(x, y)$ непрерывна. Поэтому в точках особого решения должны быть выполнены соотношения

$$F(x, y, p) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = 0. \tag{2.128}$$

Линия, определяемая уравнениями (2. 128), называется *p-дискриминантной кривой*. Исключая из системы (2.128) параметр p, получим уравнение p-дискриминантной кривой в обычном виде

$$D_p(x, y) = 0. \tag{2.129}$$

Из уравнений (2.128) видно, что особое решение представляет собой огибающую семейства кривых (2.126), где p играет роль параметра.

В общем случае p-дискриминантная кривая (2.129) кроме особых решений может содержать геометрическое место особых точек интегральных кривых. Поэтому, отыскивая особое решение, каждый раз нужно проверять, что функции $y = \psi(x)$, определяемые уравнением (2.129), удовлетворяют данному дифференциальному уравнению (2.126).

Пример. Пусть дано уравнение

$$y^2(1 + y'^2) = 1. \tag{2.130}$$

Полагая $y' = p$, получим

$$y^2 (1 + p^2) = 1.$$

Отсюда уравнения p-дискриминантной кривой есть

$$y^2 (1 + p^2) = 1, \quad 2y^2 p = 0$$

или

$$\text{а) } y = 0; \quad \text{б) } y = \pm 1.$$

Первая кривая ($y = 0$) не является интегральной и представляет собой геометрическое место особых точек (точек прикосновений) семейства интегральных кривых

$$(x - C)^2 + y^2 = 1 \tag{2.131}$$

дифференциального уравнения (2.130) (рис. 20). Прямые $y = \pm 1$ являются особыми решениями и представляют собой ветки огибающей семейства окружностей (2.131).

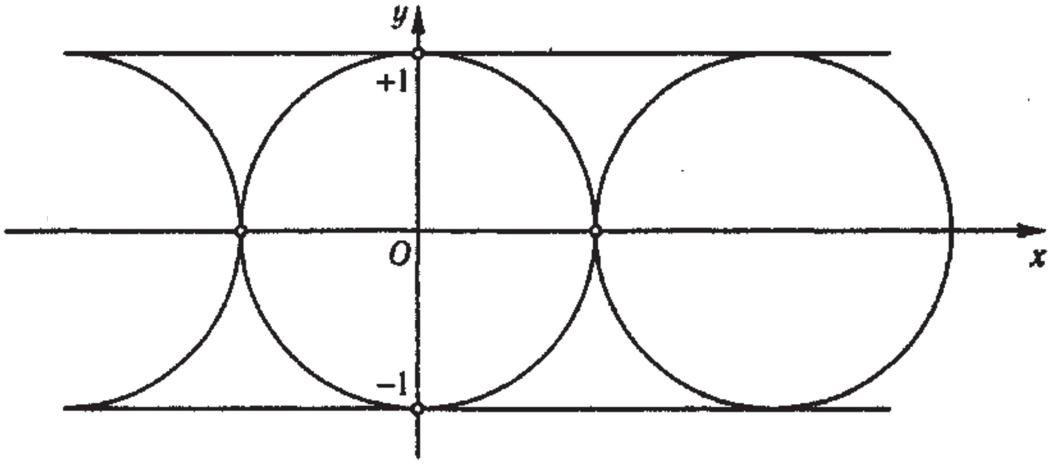

Рис. 20

Задания для самостоятельного решения

Найти общие интегралы, особые решения дифференциальных уравнений и вычертить графики семейств решений:

1. $y'^2 = y$;

2. $y = xy' + \frac{1}{y'}$;

3. $y'^2(2 - 3y)^2 = 4(1 - y)$.

§ 18. СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод дифференциальных уравнений, основы которого были заложены Ньютоном и Лейбницем, представляет собой один из наиболее плодотворных методов изучения действительного мира. Математики XVII–XVIII веков, периода создания высшей математики, не без основания считали, что «язык природы — есть язык дифференциальных уравнений». Действительно, дифференциальные уравнения являются математическим аппаратом, позволяющим устанавливать законы протекания физических процессов на основании изучения скоростей изменения величин, характеризующих эти процессы. Исходными предпосылками при этом являются физические законы, получаемые в результате непосредственного изучения материальной действительности.

В XVII–XVIII веках при помощи дифференциальных уравнений были сформулированы и решены многочисленные задачи механики, физики, химии и т. п., недоступные прежним математическим средствам. В частности, Ньютон решил знаменитую задачу о движении «двух тел» — солнца и планеты. В дальнейшем особое развитие получили дифференциальные уравнения в частных производных, к которым приводят многочисленные задачи по теории тепла, электричества, магнетизма, газовой динамики и других разделов естествознания.

В конце прошлого столетия выдающийся русский ученый А. М. Ляпунов создал новое направление в теории дифференциальных уравнений — «теорию устойчивости движения», имеющую первостепенное значение для вопросов техники.

Большой вклад в теорию дифференциальных уравнений внесли также отечественные ученые: С. В. Ковалевская, В. А. Стеклов, С. Н. Бернштейн, С. А. Чаплыгин, Н. М. Крылов, И. Г. Петровский, С. Л. Соболев и др.

Решение задачи прикладного характера обычно состоит из двух частей:

1) составление дифференциального уравнения;
2) решение этого уравнения.

Приемы решений дифференциальных уравнений первого порядка были разобраны в предыдущих параграфах. Здесь мы займемся рассмотрением типичных геометрических и физических задач, приводящих к дифференциальным уравнениям 1-го порядка.

§ 19. ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

Составление дифференциальных уравнений 1-го порядка для задач геометрического характера основывается на том фундаментальном факте, что угловой коэффициент касательной MT к данной кривой $y = y(x)$ в ее точке $M(x, y)$ равен производной y' (рис. 21), т. е. $\operatorname{tg}\alpha = y'$.

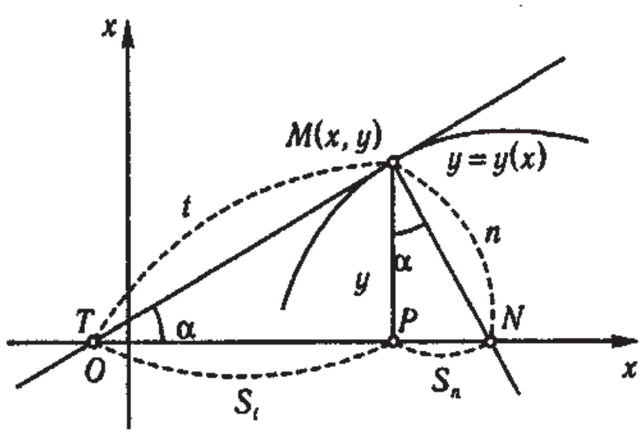

Рис. 21

Отсюда получаем уравнение касательной MT

$$Y-y = y'(X-x),$$

где X, Y — текущие координаты точки касательной, и уравнение нормали MN (перпендикуляра к касательной в точке касания)

$$Y-y = -\frac{1}{y'}(X-x),$$

где X, Y — соответственно, текущие координаты точки нормали.

Из чертежа, учитывая, что $PM = y$, получаем также формулы для длин отрезков (с учетом знаков): *подкасательной* $S_t = TP$, *поднормали* $S_n = PN$, *длины отрезка касательной* $t = MT$, *длины отрезка нормали* $n = MN$, а именно:

$$S_t = \frac{y}{y'};\ \ S_n = yy';\ \ t = \left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2};$$

$$n = |y|\sqrt{1+y'^2}. \qquad (2.132)$$

Задача. Найти кривую, для которой подкасательная в любой ее точке $M(x, y)$ равна удвоенной абсциссе точки касания.

Решение. На основании формулы для подкасательной имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{y}{y'} = 2x.$$

Отсюда

$$y' = \frac{y}{2x}$$

и, следовательно,

$$y^2 = Cx,$$

где C — произвольная постоянная.

Таким образом, искомым свойством обладают параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии которых является ось Ox.

Заметим, что решенная нами задача имеет качественный характер и формулируется так: какова та кривая, которая обладает известным свойством. Ответом служит не число, а уравнение кривой, т. е. закон изменения ее ординаты в зависимости от изменения абсциссы. По уравнению мы узнаем также «имя» кривой. В этом состоит существенное отличие дифференциальных уравнений от алгебраических, где результат решения задачи представляет собой число.

Таким образом, дифференциальные уравнения позволяют решать задачи не только количественного, но также и качественного характера, что значительно усиливает мощь математических методов.

Задача об ортогональных траекториях. Кривая $y = y(x)$ называется *ортогональной траекторией* данного семейства кривых

$$F(\xi, \eta, C) = 0, \tag{2.133}$$

где ξ, η — текущие координаты и C — параметр, если в каждой своей точке $M(x, y)$ эта кривая пересекает некоторую линию семейства (2.133) под прямым углом (рис. 22).

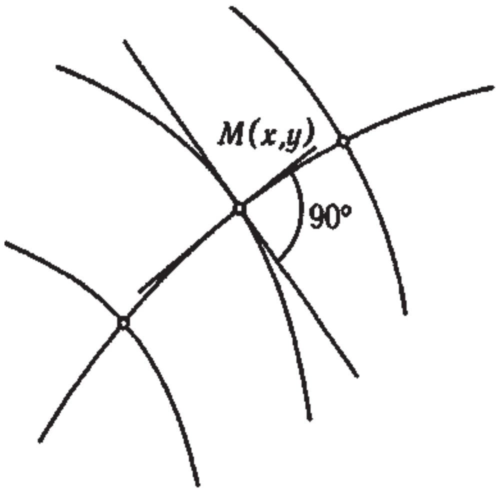

Рис. 22

Уравнение семейства кривых (2.133) удобно записать в дифференциальной форме. Дифференцируя уравнение (2.133), будем иметь

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{d\eta}{d\xi} = 0. \tag{2.134}$$

Исключая из уравнений (2.133) и (2.134) параметр C, получим дифференциальное уравнение вида

$$\Phi\left(\xi, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}\right) = 0, \tag{2.135}$$

которому удовлетворяет любая кривая данного семейства (2.133).

Пусть через точку $M(x, y)$ ортогональной траектории проходит одна из кривых семейства (2.133). В этой точке, очевидно, имеют место равенства

$$\xi = x, \quad \eta = y.$$

Кроме того, в силу условия перпендикулярности касательных, имеем

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}. \tag{2.136}$$

Подставляя эти величины в уравнение (2.135), получим дифференциальное уравнение

$$\Phi\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0 \tag{2.137}$$

(здесь $y' = \frac{dy}{dx}$), которому удовлетворяют координаты точек и направление ортогональной траектории. Интегрируя последнее уравнение, найдем все семейство ортогональных траекторий.

Замечание: Записывая дифференциальное уравнение кривых (2.135) в обычной форме

$$\Phi(x, y, y') = 0, \qquad (2.138)$$

мы на основании формулы (2.137) имеем следующее простое правило: чтобы получить дифференциальное уравнение ортогональных траекторий данного семейства, нужно в дифференциальном уравнении семейства заменить y' на $-\frac{1}{y'}$.

Пример. Найти ортогональные траектории семейства эллипсов (рис. 23)

$$x^2 + 2y^2 = C. \qquad (2.139)$$

Решение. Дифференцируя уравнение (2.139), будем иметь

$$2x + 4yy' = 0,$$

откуда

$$2yy' + x = 0. \qquad (2.140)$$

Это и есть дифференциальное уравнение семейства эллипсов (2.139). Согласно замечанию, заменяя в уравнении (2.140) y' на $-\frac{1}{y'}$, получим дифференциальное уравнение ортогональных траекторий

$$-\frac{2y}{y'} + x = 0$$

или

$$y' = \frac{2y}{x}. \qquad (2.141)$$

Интегрируя последнее уравнение, получим семейство ортогональных траекторий

$$y = Cx^2,$$

представляющее собой семейство парабол (рис. 23).

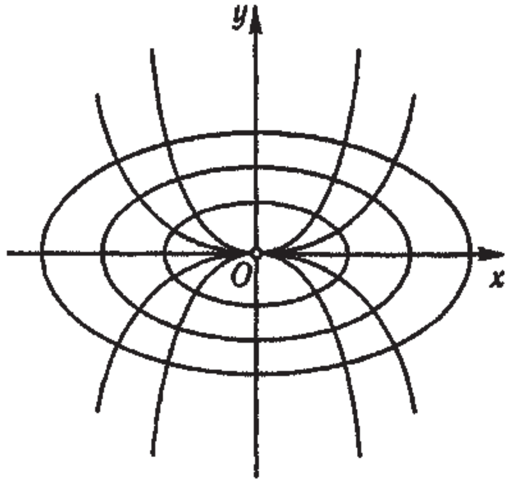

Рис. 23

Задания для самостоятельного решения

1. Найти кривую, проходящую через точку (0, 1), у которой подкасательная постоянна.

2. Найти кривую, у которой поднормаль постоянна.

3. Найти кривую, у которой касательная в любой ее точке образует постоянный угол α с радиусом-вектором этой точки.

4. Найти кривую, для которой подкасательная равна среднему арифметическому координат точки касания.

5. Найти кривую, у которой ордината точки касания есть среднее геометрическое ее абсциссы и отрезка, отсекаемого нормалью на оси Ox.

6. Найти ортогональные траектории семейства гипербол

$$xy = C.$$

§ 20. ЗАДАЧИ ФИЗИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

При составлении дифференциального уравнения физической задачи, обычно, используя известные физические законы, приходится находить соотношение между бесконечно малыми приращениями искомых величин.

Здесь имеет место *принцип отбрасывания бесконечно малых высших порядков.*

Теорема. При составлении дифференциального уравнения первого порядка, связывающего некоторые переменные x и y, можно откидывать бесконечно малые высших порядков относительно приращений Δx и Δy этих переменных, заменяя последние при этом, соответственно, дифференциалами dx и dy.

Доказательство. Пусть точное соотношение между переменными x и y и их бесконечно малыми приращениями Δx и Δy имеет вид

$$A(x, y)\Delta x + B(x, y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y = 0, \qquad (2.142)$$

где $\alpha = \alpha(x, y, \Delta x, \Delta y) \to 0$ и $\beta = \beta(x, y, \Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Деля обе части равенства (2.142) на Δx, получим

$$A(x, y) + B(x, y)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \alpha + \beta\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

отсюда, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ и учитывая, что

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

будем иметь

$$A(x, y) + B(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$

или

$$A(x, y)\,dx + B(x, y)\,dy = 0. \qquad (2.143)$$

Как видно, дифференциальное уравнение (2.143) формально получается из уравнения (2.142) путем отбрасывания совокупности бесконечно малых высшего порядка $\alpha\Delta x$ и $\alpha\Delta y$ относительно Δx и Δy и замены Δx на dx и Δy на dy.

Таким образом, наш принцип установлен.

Замечание. В дальнейшем при составлении дифференциальных уравнений 1-го порядка мы будем вместо бесконечно малых приращений величин писать дифференциалы этих величин, игнорируя при этом члены высшего порядка малости относительно приращений данных величин.

Задача 1. В резервуар, содержащий 10 кг соли на 100 л смеси, каждую минуту поступает 30 л воды и вытекает 20 л смеси (рис. 24). Определить, какое количество соли останется в резервуаре через t мин., предполагая, что смесь мгновенно перемешивается.

Решение. При составлении дифференциального уравнения изучаемое явление следует расматривать в общем положении; начальные данные определяют лишь начальные условия и, как правило, не входят в само дифференциальное уравнение.

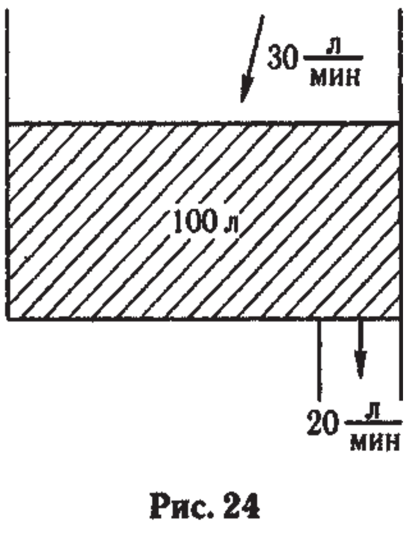

Рис. 24

Пусть x — количество соли в резервуаре в момент времени t мин., а $x + dx$ — количество соли в момент времени $t + dt$ мин. Обращаем внимание, что здесь вместо приращений мы пишем дифференциалы. Таким образом, dx есть изменение количества соли за бесконечно малый промежуток времени dt, причем так как количество соли убывает, то $dx < 0$ при $dt > 0$.

С другой стороны, изменение количества соли происходит лишь потому, что вытекающая смесь уносит с собой соль. Так как объем смеси в резервуаре в момент времени t, очевидно, равен $v = 100 + 30t - 20t = 100 + 10t$, то концентрация соли (т. е. количество соли, содержащееся в единице объема) в момент времени t будет равна $\frac{x}{100 + 10t}$.

С точностью до бесконечно малой высшего порядка относительно dt можем считать, что в течение бесконечно малого промежутка времени $(t, t+dt)$ концентрация соли остается постоянной и поэтому количество соли, ушедшее из резервуара за промежуток времени dt, отсчитанный от момента времени t, равно

$$\frac{x}{100+10t}\cdot 20dt = \frac{2x}{10+t}dt.$$

Приравнивая это выражение абсолютной величине изменения количества соли, т. е. $|dx|$, будем иметь дифференциальное уравнение задачи

$$-dx = \frac{2x}{10+t}dt. \qquad (2.144)$$

Кроме того, имеет место начальное условие

$$x|_{t=0} = 10. \qquad (2.145)$$

Разделяя переменные в уравнении (2.144) и интегрируя, последовательно получим

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2dt}{10+t}$$

и

$$\ln x = \ln C - 2\ln(10+t),$$

откуда

$$x = \frac{C}{(10+t)^2}.$$

Из начального условия (2.145) находим

$$10 = \frac{C}{10^2},$$

т. е. $C = 1000$. Поэтому окончательно закон изменения количества соли x в кг, находящейся в резервуаре, в зависимости от текущего времени t в минутах дается формулой (рис. 25)

$$x = \frac{1000}{(10+t)^2} \qquad (2.146)$$

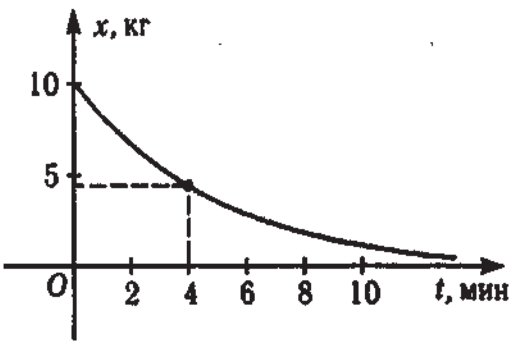

Рис. 25

Замечание. Из формулы (2.146), зная количество соли, находящейся в резервуаре (последнее легко установить, измеряя объем резервуара и концентрацию соли в нем), можно определить сколько времени прошло от начала процесса. На этой идее основано вычисление возраста морей и океанов.

Задача 2. На какой высоте x от поверхности земли находится летчик, если давление барометра в кабине самолета равно P кг / см^2, а на поверхности земли P_0 кг / см^2.

Р е ш е н и е. Давление P воздуха на площадку $\sigma = 1$ см^2. помещенную на высоте x, создается весом бесконечного воздушного столба, опирающегося на эту площадку (рис. 26). Поэтому, если уровень площадки увеличится на dx, то давление P уменьшится на величину $-dP$, равную весу отпавшего столбика воздуха с основанием σ и высотой dx. Обозначая через γ удельный вес воздуха на высоте x, имеем дифференциальное уравнение

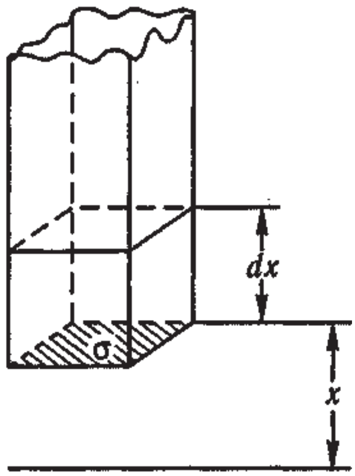

Рис. 26

$$-dP = \gamma dx. \qquad (2.147)$$

Предположим, что температура воздуха на поверхности земли и на высоте x одна и та же. Тогда согласно закону Бойля–Мариотта удельный вес воздуха изменяется пропорционально давлению и мы имеем

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{P}{P_0}, \qquad (2.148)$$

где γ_0 — удельный вес воздуха на поверхности земли. Отсюда

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{P_0} P$$

и, следовательно, дифференциальное уравнение (2.147) принимает вид

$$dP = -\frac{\gamma_0}{P_0} P dx. \qquad (2.149)$$

Начальные условия здесь таковы: $P = P_0$ при $x = 0$.

Интегрируя уравнение (2.147), получаем

$$dx = -\frac{P_0}{\gamma_0} \frac{dP}{P}$$

и

$$x = C - \frac{P_0}{\gamma_0} \ln P.$$

Из начальных условий находим

$$C = \frac{P_0}{\gamma_0} \ln P_0;$$

поэтому окончательно имеем

$$x = \frac{P_0}{\gamma_0} \ln \frac{P_0}{P} \tag{2.150}$$

(*барометрическая формула Лапласа*).

Для численных расчетов примем техническую систему мер. При температуре 15 °C имеем

$$\gamma_0 = 1{,}293 \text{ кг}/\text{м}^3 \approx 1{,}3 \text{ кг}/\text{м}^3$$

и

$$P_0 \approx 1 \text{ атм.} = 1 \text{ кг}/\text{см}^2 = 10000 \text{ кг}/\text{м}^2.$$

Отсюда

$$x = 7700 \ln \frac{1}{P} \text{ м},$$

где давление P выражено в атмосферах. В частности, при $P = \frac{1}{2}$ атм. имеем:

$$x = 7700 \cdot \ln 2 = 7700 \cdot 0{,}69 = 5500 \text{ м} = 5{,}3 \text{ км}.$$

Формула (2.151) дает лишь приблизительные значения, так как не учтено изменение температуры воздуха с высотой и другие факторы.

Задания для самостоятельного решения

1. Согласно закону Ньютона скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и среды. Через сколько минут тело, нагретое до 100 °C и находящееся в воздухе температуры 20 °C, охладится до 30 °C, если в течение 20 минут это тело охладилось до 60 °C.

2. В какое время вода, заполняющая полусферическую чашу диаметра $D = 2$ м, вытечет через круглое отверстие диаметра $d = 0{,}2$ м в дне чаши?

Указание. Скорость истечения воды при напоре h равна

$$v = c\sqrt{2gh},$$

где $c = 0{,}6$ — опытный коэффициент и $g = 9{,}82$ м/сек^2 — ускорение силы тяжести.

Глава III
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Дифференциальное уравнение второго порядка с неизвестной функцией $y = y(x)$ имеет вид

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{3.1}$$

где F — данная функция.

Предполагая, что уравнение (3.1) может быть однозначно разрешено относительно производной y'', получим

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{3.2}$$

где f — некоторая известная функция.

Общее решение этого уравнения

$$y = \varphi(x, C_1, C_2) \tag{3.3}$$

содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2. Поэтому через данную точку $M_0(x_0, y_0)$, вообще говоря, проходит пучок интегральных кривых (рис. 27), так как одна из произвольных постоянных остается неопределенной. Чтобы выделить определенную интегральную кривую, кроме точки M_0, достаточно задать еще направление касательной в точке M_0 к искомой интегральной кривой

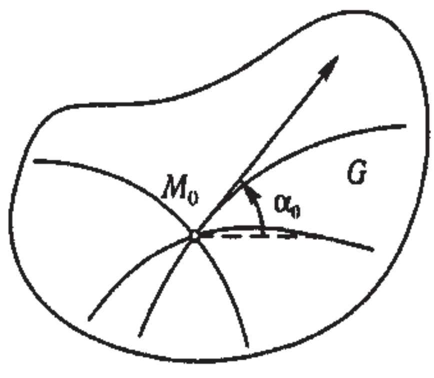

Рис. 27

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = y'_0. \tag{3.4}$$

Таким образом, мы имеем следующие *начальные условия*:

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0. \tag{3.5}$$

Основная задача, которая здесь ставится, есть следующая: найти решение дифференциального уравнения (3.2), удовлетворяющее начальным условиям (3.5) (*задача Коши*). Геометрически это значит: найти интегральную кривую уравнения (3.2), проходящую через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ в заданном направлении $\operatorname{tg}\alpha_0 = y_0$.

Из начальных условий (3.5) вытекает, что постоянные C_1 и C_2 должны удовлетворять системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \varphi(x_0, C_1, C_2) \\ y_0' &= \varphi_x'(x_0, C_1, C_2) \end{aligned}\right\}. \tag{3.6}$$

В зависимости от того, имеет или не имеет эта система решения, задача Коши разрешима или не разрешима.

Приведем без доказательства важную *теорему существования и единственности решений*.

Теорема. Если в некоторой области

$$|x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b, \quad |y' - y_0'| < c$$

(a, b, c — положительные числа) функция $f(x, y, y')$ непрерывна и имеет ограниченные частные производные

$$f_y'(x, y, y'), \quad f_{y'}'(x, y, y'),$$

то существует единственное решение

$$y = \varphi(x) \tag{3.7}$$

дифференциального уравнения (3.2), удовлетворяющее начальным условиям (3.5) и определенное на некотором отрезке $|x - x_0| \le h$.

§ 2. МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть по оси Ox движется материальная точка массы m (рис. 28), причем действующая сила

$$X = X\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right),$$

в самом общем случае, зависит от времени t, координаты точки x и ее скорости $\frac{dx}{dt}$. На основании закона Ньютона имеем дифференциальное уравнение движения

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right). \tag{3.8}$$

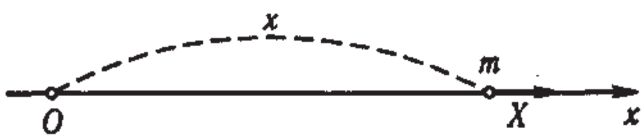

Рис. 28

Таким образом, всякое дифференциальное уравнение второго порядка, разрешенное относительно старшей производной, можно рассматривать как дифференциальное уравнение прямолинейного движения материальной точки. Начальные условия здесь приобретают следующий вид:

$$x\big|_{t=t_0} = x_0, \quad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=t_0} = x_0', \tag{3.9}$$

т. е. в начальный момент t_0 задаются: x_0 — начальное положение точки и x_0' — ее начальная скорость.

§ 3. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СЛУЧАИ

Случай 1. Пусть правая часть дифференциального уравнения 2-го порядка (3.2) является функцией только от переменной x, т. е. дифференциальное уравнение имеет вид

$$y'' = X(x), \tag{3.10}$$

где X — известная функция.

Интегрируя последовательно два раза обе части уравнения (3.10), будем иметь

$$y' = \int X(x)dx + C_1$$

и

$$y = \int dx \int X(x)dx + C_1x + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример. Решить уравнение

$$y'' = \frac{1}{x}.$$

Решение. Интегрируя, последовательно находим

$$y' = \int \frac{dx}{x} + C_1 = \ln|x| + C_1$$

и

$$y = \int \ln|x|dx + C_1x + C_2 = x\ln|x| - x + C_1x + C_2.$$

Объединяя два члена, окончательно получим

$$y = x\ln|x| + C_1x + C_2. \tag{3.11}$$

Случай 2. Пусть правая часть дифференциального уравнения (3.2) явным образом зависит только от неизвестной функции y, т. е.

$$y'' = Y(y), \tag{3.12}$$

где Y — данная функция.

Примем y за независимую переменную. Тогда, применяя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = y'\frac{dy'}{dy}.$$

На основании уравнения (3.12) имеем

$$y'' = y'\frac{dy'}{dy} = Y(y)$$

или

$$y'dy' = Y(y)dy. \tag{3.13}$$

Интегрируя последнее равенство, находим

$$\frac{y'^2}{2} = \int Y(y)dy + \frac{C_1}{2}$$

и, следовательно,

$$y' = \pm\sqrt{2\int Y(y)dy + C_1}. \tag{3.14}$$

Разделяя переменные в уравнении (3.14) и интегрируя, получим общий интеграл нашего дифференциального уравнения:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{2\int Y(y)dy + C_1}} = \pm(x + C_2), \tag{3.15}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Замечание. Не следует запоминать формулу (3.15), достаточно усвоить соответствующий прием.

Пример. Решить уравнение

$$y'' = \frac{1}{y^3}. \tag{3.16}$$

Решение. Полагая

$$y'' = y'\frac{dy'}{dy},$$

будем иметь

$$y'\frac{dy'}{dy} = \frac{1}{y^3}$$

или

$$y'dy' = \frac{dy}{y^3}.$$

Отсюда находим

$$\int y'dy' = \int\frac{dy}{y^3},$$

то есть

$$\frac{y'^2}{2} = -\frac{1}{2y^2} + \frac{C_1}{2}$$

и, следовательно,

$$y' = \pm\frac{\sqrt{C_1y^2-1}}{y}.$$

Разделяя переменные в последнем уравнении, получим

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{C_1y^2-1}} = \pm dx.$$

Отсюда

$$\int\frac{y\,dy}{\sqrt{C_1y^2-1}} = \pm\int dx$$

или

$$\frac{1}{C_1}\sqrt{C_1y^2-1} = \pm(x + C_2).$$

Таким образом, общий интеграл уравнения (3. 16) имеет вид*

$$C_1y^2 = 1 + (C_1x + C_2)^2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, причем очевидно, что $C_1 > 0$.

Случай 3. Пусть правая часть дифференциального уравнения (3.2) явным образом зависит только от y', т. е. уравнение имеет вид

$$y'' = P(y'),$$

где P — некоторая известная функция.

Полагая

$$y' = p \quad \text{и} \quad y'' = \frac{dp}{dx},$$

будем иметь

$$\frac{dp}{dx} = P(p).$$

Отсюда

$$dx = \frac{dp}{P(p)}$$

и, следовательно,

$$x = \int\frac{dp}{P(p)} + C_1. \tag{3.18}$$

Разрешив уравнение (3.18) относительно p, получим

$$p = \varphi(x, C_1).$$

---

* В этой формуле через C_2 мы обозначили выражение C_1C_2.

Из последнего уравнения, учитывая, что $p = \frac{dy}{dx}$, легко найти y:

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2. \tag{3.19}$$

Однако не всегда уравнение (3.18) легко разрешимо относительно p. Поэтому мы укажем другой способ нахождения функции y. Очевидно,

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Используя дифференциальное уравнение (3.17), получаем

$$p\frac{dp}{dy} = P(p)$$

и, следовательно,

$$y = \int \frac{p\,dp}{P(p)} + C_2. \tag{3.20}$$

Система уравнений (3.18), (3.20) дает общий интеграл дифференциального уравнения (3. 17) в параметрическом виде, где роль параметра играет p. Исключая из этих уравнений p, получим общий интеграл уравнения (3.17) в обычном виде

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0.$$

Замечание. Так как параметрическое представление кривой неоднозначно, то в формулах (3. 18) и (3. 20) за параметр можно принимать любую величину $\theta = \psi(p)$, являющуюся известной функцией от p.

Пример. Найти все плоские кривые, имеющие постоянный радиус кривизны, равный R.

Решение. Вспоминая формулу радиуса кривизны, имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = R.$$

Отсюда

$$y'' = \frac{1}{R}(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Полагая

$$y' = p \quad \text{и} \quad y'' = \frac{dp}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

получим

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{R}(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}$$

и

$$p\frac{dp}{dy} = \frac{1}{R}(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Следовательно,

$$x = R\int\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + C_1 \qquad (3.21)$$

и

$$y = R\int\frac{p\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + C_2. \qquad (3.22)$$

Полагая в интегралах (3.21), (3.22)

$$p = \operatorname{tg}\Theta,\ \ dp = \frac{d\Theta}{\cos^2\Theta},$$

находим

$$x = R\int\cos\Theta d\Theta + C_1 = R\sin\Theta + C_1 \qquad (3.23)$$

и

$$y = R\int\sin\Theta d\Theta + C_2 = -R\cos\Theta + C_2. \qquad (3.24)$$

Формулы (3.23), (3.24) дают параметрическое представление системы интегральных кривых. Исключая из уравнений (3.23) и (3.24) параметр Θ, получим

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = R^2. \qquad (3.25)$$

Как и следовало ожидать, искомые интегральные кривые есть окружности радиуса R.

Задания для самостоятельного решения

1. $y'' = \sin^2 x$.

2. $y'' + \frac{1}{2y^2} = 0$, если $y(0) = 1$ и $y'(0) = 1$.

3. $2y'y'' = 1$.

4. Материальная точка брошена вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Найти наибольшую высоту поднятия точки, принимая сопротивление воздуха пропорциональным квадрату скорости.

§ 4. СЛУЧАИ ПОНИЖЕНИЯ ПОРЯДКА

Укажем два случая, когда дифференциальное уравнение второго порядка (3.1) легко приводится к дифференциальному уравнению первого порядка.

С л у ч а й 1. Левая часть дифференциального уравнения второго порядка (3.1) не содержит x, т. е. дифференциальное уравнение имеет вид

$$F(y, y', y'') = 0. \tag{3.26}$$

Полагая

$$y' = p \quad \text{и} \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0, \tag{3.27}$$

где роль независимой переменной играет y.

С л у ч а й 2. Левая часть дифференциального уравнения второго порядка (3.1) не содержит y, т. е. дифференциальное уравнение имеет вид

$$F(x, y', y'') = 0. \tag{3.28}$$

Полагая

$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx},$$

получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0. \tag{3.29}$$

Для решений уравнений первого порядка (3.27), (3.29) следует применить разобранные ранее приемы.

З а м е ч а н и е. При преобразовании производной y нужно добиваться того, чтобы дифференцирование функции $y' = p$ происходило по той переменной x или y, которая входит в правую часть дифференциального уравнения.

Пример. Найти решение уравнения

$$y'' = y'^2 - y,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y = -\frac{1}{4}, \quad y' = \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad x = 1.$$

Р е ш е н и е. Полагая

$$y' = p, \quad y'' = p\frac{dp}{dy},$$

получим

$$p\frac{dp}{dy} = p^2 - y \tag{3.30}$$

или

$$\frac{dp}{dy} = p - yp^{-1}. \qquad (3.31)$$

Очевидно, это уравнение Бернулли. Поступая согласно общему методу, делим обе части уравнения (3.31) на p^{-1}, т. е. возвращаемся снова к виду (3.30). Примем теперь

$$p^2 = z, \quad 2p\frac{dp}{dy} = \frac{dz}{dy},$$

откуда находим

$$\frac{1}{2}\frac{dz}{dy} = z - y$$

или

$$\frac{dz}{dy} - 2z = -2y. \qquad (3.32)$$

Интегрирующий множитель для уравнения (3.32) имеет вид

$$\mu = e^{-\int 2dy} = e^{-2y}.$$

Умножая обе части уравнения (3.32) на μ, получим

$$\frac{d}{dy}(e^{-2y}z) = -2ye^{-2y},$$

откуда

$$e^{-2y}z = -2\int ye^{-2y}dy = ye^{-2y} + \frac{1}{2}e^{-2y} + C_1.$$

Следовательно,

$$z = y + \frac{1}{2} + C_1e^{2y}$$

или

$$p^2 = y + \frac{1}{2} + C_1e^{2y}.$$

Используя начальные условия, будем иметь

$$\frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + C_1e^{-\frac{1}{2}},$$

откуда

$$C_1 = 0$$

и, следовательно,

$$p^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y + \frac{1}{2}. \qquad (3.33)$$

Заметим, что если бы мы на этом этапе решения не определили произвольную постоянную C_1, то задача сильно усложнилась бы.

Из уравнения (3.33) получаем

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{y+\frac{1}{2}}.$$

Так как в окрестности начальных значений производная $y' = \frac{dy}{dx}$ положительна, то перед радикалом следует взять знак плюс (+). Поэтому

$$\frac{dy}{\sqrt{y+\frac{1}{2}}} = dx.$$

Интегрируя последнее равенство, будем иметь

$$\int\frac{dy}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}} = \int dx$$

или

$$2\sqrt{y+\frac{1}{2}} = x + C_2. \qquad (3.34)$$

Для определения постоянной C_2 используем начальные условия

$$y = -\frac{1}{4} \text{ при } x = 1.$$

Имеем

$$1 = 1 + C_2, \text{ т. е. } C_2 = 0.$$

Таким образом, искомая интегральная кривая задается уравнением

$$2\sqrt{y+\frac{1}{2}} = x$$

или

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}. \qquad (3.35)$$

Задания для самостоятельного решения

1. $yy'' = y'^2 + y^2 \ln y$.

2. $(1+x^2)y'' + (1+y'^2) = 0$.

3. $y'' + y'^2 = yy'$, если $y(0) = 0$ и $y'(0) = -1$.

4. Найти кривую для любой точки, проекция радиуса кривизны которой на ось Oy имеет одно и то же значение.

5. Найти форму равновесия каната с закрепленными концами, принимаемую им под действием собственной тяжести.

6. Цепь длины $l = 10$ м соскальзывает вниз со стола без трения. За какое время T соскользнет цепь, если движение начинается из положения, когда свисает $a = 2$ м цепи.

§ 5. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В технических приложениях важное значение имеют *линейные дифференциальные уравнения*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{3.36}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ (*коэффициенты уравнения*) и $f(x)$ (*правая часть*, или *свободный член уравнения*) — некоторые данные непрерывные функции. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (3.36) называется *однородным* или *без правой части*; в противном случае оно называется *неоднородным*, или *с правой частью*.

Мы здесь изучим лишь линейные уравнения *с постоянными коэффициентами*, причем в первую очередь рассмотрим однородное уравнение.

Итак, пусть

$$p(x) = a, \quad q(x) = b, \tag{3.37}$$

где a и b — постоянные действительные числа и $f(x) \equiv 0$.

Уравнение (3.36) при этом принимает вид

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{3.38}$$

Наряду с дифференциальным уравнением рассмотрим соответствующее алгебраическое уравнение

$$k^2 + ak + b = 0, \tag{3.39}$$

которое называется *характеристическим уравнением* для уравнения (3.38). Формально характеристическое уравнение (3.39) получается из дифференциального уравнения (3.38) путем замены производных различных порядков на соответствующие степени неизвестной k, причем функция y, как всегда, считается производной нулевого порядка.

Пусть k_1 и k_2 — корни характеристического уравнения (3.39), т. е.

$$k_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}. \tag{3.40}$$

В силу известной теоремы Виета имеем

$$k_1 + k_2 = -a, \quad k_1k_2 = b. \tag{3.41}$$

Поэтому дифференциальное уравнение (3.38) можно записать в следующем виде:

$$y'' - (k_1 + k_2)y' + k_1k_2y = 0$$

или

$$(y' - k_1 y)' - k_2 (y' - k_1 y) = 0. \qquad (3.42)$$

Здесь возможны следующие три случая.

Случай 1. Пусть

$$D = \frac{a^2}{4} - b > 0.$$

Тогда корни k_1 и k_2 (3.40) характеристического уравнения (3.39) действительны и различны.

Полагая

$$y' - k_1 y = u. \qquad (3.43)$$

из уравнения (3.42) будем иметь

$$u' - k_2 u = 0$$

или

$$\frac{du}{u} = k_2 dx.$$

Отсюда

$$\ln u = k_2 x + \ln C$$

и, следовательно,

$$u = Ce^{k_2 x}, \qquad (3.44)$$

где C — произвольная постоянная.

Подставляя это выражение в формулу (3.43), получим линейное уравнение первого порядка

$$y' - k_1 y = C^{k_2 x}. \qquad (3.45)$$

Как известно, линейное уравнение (3.45) имеет интегрирующий множитель (см. гл. 1, § 11)

$$\mu = e^{-k_1 x}.$$

Умножая обе части уравнения (3.45) на μ, будем иметь

$$(ye^{-k_1 x})' = Ce^{(k_2 - k_1)x};$$

отсюда

$$ye^{-k_1 x} = C_1 + C_2 e^{(k_2 - k_1)x},$$

где C_1 и $C_2 = \frac{C}{k_2 - k_1}$ — произвольные постоянные. Следовательно,

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \qquad (3.46)$$

Заметим, что формула (3.46), как вытекает из ее вывода, дает совокупность всех решений однородного дифференциального уравнения (3.38). Кроме того, решение (3.46) является общим, так как оно способно удовлетворить любые начальные условия.

В самом деле, положим

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0', \tag{3.47}$$

где y_0, y_0' — какие-нибудь определенные числа. Для нахождения соответствующих постоянных C_1 и C_2 из формулы (3.46), имеем следующую систему вравнений

$$\left.\begin{aligned} C_1e^{k_1x_0} + C_2e^{k_2x_0} &= y_0 \\ C_1k_1e^{k_1x_0} + C_2k_2e^{k_2x_0} &= y_0' \end{aligned}\right\}. \tag{3.48}$$

Определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{k_1x_0} & e^{k_2x_0} \\ k_1e^{k_1x_0} & k_2e^{k_2x_0} \end{vmatrix} = (k_2 - k_1)e^{(k_1+k_2)x_0} \neq 0,$$

поэтому система (3.48) совместна и имеет единственное решение. Следовательно, существует одно и только одно частное решение уравнения (3. 38), удовлетворяющее начальным условиям (3.47) и получающееся из формулы (3.46) соответствующим этим условиям выбором постоянных C_1 и C_2.

Пример. Найти решение уравнения

$$y'' - 2y' - 15 = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -2.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k - 15 = 0.$$

Решая это уравнение, получим

$$k = 1 \pm \sqrt{1+15} = 1 \pm 4,$$

то есть

$$k_1 = 5, \quad k_2 = -3.$$

Следовательно, общее решение уравнения на основании формулы (3.46) имеет вид

$$y = C_1e^{5x} + C_2e^{-3x}.$$

Для определения постоянных C_1 и C_2, в силу начальных условий, получаем уравнения

$$1 = C_1 + C_2, \quad -2 = 5C_1 - 3C_2.$$

Решая последнюю систему, будем иметь

$$C_1 = \frac{1}{8},\ C_2 = \frac{7}{8}.$$

Следовательно, искомое частное решение таково:

$$y = \frac{1}{8}(e^{5x} + 7e^{-3x}).$$

Случай 2. Пусть

$$D = \frac{a^2}{4} - b < 0.$$

Тогда корни k_1 и k_2 характеристического уравнения (3.39) различны, но являются комплексно сопряженными, т. е.

$$k_1 = \alpha + i\beta,\ \ k_2 = \alpha - i\beta, \tag{3.49}$$

где $i = \sqrt{-1}$, а $\alpha = -\frac{a}{2}$ и $\beta = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$ — действительны.

Вычисления в случае 2 полностью аналогичны вычислениям в случае 1, но с той только разницей, что здесь приходится иметь дело с комплексными функциями от действительной переменной x. Поэтому общее решение дифференциального уравнения (3.38) формально выразится той же формулой (3.46)

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}, \tag{3.50}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, вообще говоря, комплексные.

Справедливость этой формулы легко проверить непосредственно. В самом деле, подставляя эту функцию в уравнение (3.38), получим

$$y'' + ay' + by = C_1(k_1^2 + ak_1 + b)e^{k_1x} + C_2(k_1^2 + ak_1 + b) \equiv 0,$$

т. е. y — есть решение уравнения (3.38).

Формуле (3.50) можно придать другой вид. Подставляя значения(3.49) корней k_1 и k_2 в формулу (3.50), будем иметь

$$y = C_1e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(C_1e^{i\beta x} + C_2e^{-i\beta x}).$$

Используя формулы Эйлера

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x,$$

и

$$e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x,$$

окончательно находим

$$y = e^{\alpha x}(A_1 \cos\beta x + A_2 \sin\beta x), \tag{3.51}$$

где $A_1 = C_1 + C_2$, $A_2 = i\,(C_1 - C_2)$ — произвольные постоянные.

Формулу (3.51) можно записать также в несколько ином виде. Полагая в формуле (3.51)

$$A_1 = A\sin\varphi\,, \quad A_2 = A\cos\varphi,$$

где A и φ — новые произвольные постоянные, определяемые по формулам

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}\,, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1}{A_2},$$

очевидно, получим

$$y = Ae^{\alpha x}\sin(\beta x + \varphi). \tag{3.52}$$

Пример. Решить уравнение

$$y'' - 2y' + 5y = 0. \tag{3.53}$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 - 2k + 5 = 0.$$

Отсюда

$$k_{1,\,2} = 1 \pm 2i,$$

т. е. $\alpha = 1$ и $\beta = 2$. По формуле (3. 51) имеем общее решение уравнения (3.53)

$$y = e^x\,(A_1\cos 2x + A_2\sin 2x),$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные.

Случай 3. Пусть

$$D = \frac{a^2}{4} - b = 0.$$

Корни характеристического уравнения (3.39) будут кратные (совпадающие)

$$k_1 = k_2 = -\frac{a}{2}. \tag{3.54}$$

Дифференциальное уравнение (3.42) принимает вид

$$(y' - k_1 y)' - k_1(y' - k_1 y) = 0. \tag{3.55}$$

Отсюда, полагая

$$y' - k_1 y = 0, \tag{3.56}$$

получим

$$u' - k_1 u = 0.$$

Решив последнее уравнение, будем иметь

$$u = C_1 e^{k_1 x},$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Подставляя последнее выражение в формулу (3.56), будем иметь

$$y' - k_1 y = C_1 e^{k_1 x}.$$

Используя интегрирующий множитель

$$\mu = e^{-k_1 x},$$

получим

$$(ye^{-k_1 x})' = C_1,$$

откуда

$$ye^{-k_1 x} = C_1 x + C_2$$

и, следовательно,

$$y = (C_1 x + C_2) e^{k_1 x}, \tag{3.57}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Формула (3.57), как легко убедиться, дает общее решение линейного однородного дифференциального уравнения (3.55).

Пример. Решить уравнение

$$y'' + 2y' + y = 0. \tag{3.58}$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + 2k + 1 = 0,$$

откуда

$$k_1 = k_2 = -1.$$

Поэтому общее решение уравнения (3.58), в силу формулы (3.57), есть

$$y = (C_1 x + C_2) e^{k_1 x}.$$

Сводка результатов случаев 1–3 дается в таблице.

Таблица решений уравнения $y'' + ay' + by = 0$

Случай	Характер корней k_1 и k_2 характеристического уравнения	Общее решение
1	Корни k_1 и k_2 действительные и различные ($k_1 \neq k_2$)	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2	Корни комплексные: $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_1 = \alpha - i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$
3	Корни кратные: $k_1 = k_2$	$y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$

Задания для самостоятельного решения

Решить уравнения.

1. $y'' + y' - 2y = 0$. **2.** $y'' + y' + y = 0$.

3. $4y'' - 4y' + y = 0$. **4.** $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ ($\omega > 0$ — постоянно).

§ 6. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим задачу о прямолинейных колебаниях материальной точки в сопротивляющейся среде под действием центральной упругой силы (*гармонический осцилятор*).

Пусть на материальную точку массы m в направлении оси Ox действует центральная упругая сила

$$X = -kx,$$

где x — отклонение точки от положения равновесия O (рис. 29), k — постоянный коэффициент пропорциональности. Кроме того, на эту точку действует еще сила сопротивления среды

$$X_1 = -k_1 \frac{dx}{dt},$$

которую мы принимаем пропорциональной первой степени абсолютной величины скорости (k_1 — коэффициент пропорциональности).

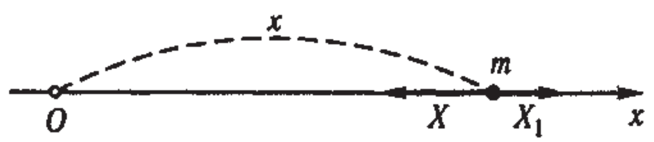

Рис. 29

Согласно закону Ньютона имеем дифференциальное уравнение движения

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - k_1\frac{dx}{dt}$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \beta^2 x = 0, \qquad (3.59)$$

где

$$\alpha = \frac{k_1}{2m}, \quad \beta^2 = \frac{k}{m}.$$

Мы предположим, что в начальный момент $t = 0$ материальная точка имела отклонение равное x_0 и была отпущена без толчка. Поэтому начальные условия имеют вид

$$x\big|_{t=0} = x_0, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0. \qquad (3.60)$$

Характеристическое уравнение в нашем случае принимает вид*

$$p^2 + 2\alpha p + \beta^2 = 0, \qquad (3.61)$$

отсюда

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}. \qquad (3.62)$$

Рассмотрим три случая.

Случай 1. Пусть

$$\alpha^2 - \beta^2 = \delta^2 > 0.$$

Физически это значит, что сопротивление среды велико по сравнению с упругой силой.

Тогда корни характеристического уравнения (3.61) в силу формулы (3.62) будут

$$p_1 = -\alpha + \delta, \quad p_1 = -\alpha - \delta \qquad (3.63)$$

и, следовательно, общее решение имеет вид

$$x = C_1 e^{(-\alpha+\delta)t} + C_2 e^{(-\alpha-\delta)t}. \qquad (3.64)$$

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 используем начальные условия (3.60). Составляя производную

$$\frac{dx}{dt} = C_1(-\alpha+\delta)e^{(-\alpha+\delta)t} + C_2(-\alpha-\delta)e^{(-\alpha-\delta)t} \qquad (3.65)$$

---

* Во избежание путаницы мы здесь неизвестную обозначаем через p.

и полагая $t = 0$ в уравнениях (3.64) и (3.65), получим

$$C_1 + C_2 = x_0,$$
$$(\alpha - \delta)C_1 + (\alpha + \delta)C_2 = 0. \quad (3.66)$$

Отсюда

$$C_1 = \frac{x_0}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{\delta}\right), \quad C_2 = \frac{x_0}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{\delta}\right). \quad (3.67)$$

Следовательно,

$$x = \frac{x_0}{2}e^{-\alpha t}\left[(e^{\delta t} + e^{-\delta t}) + \frac{\alpha}{\delta}(e^{\delta t} - e^{-\delta t})\right]$$

или

$$x = x_0 e^{-\alpha t}\left(\operatorname{ch}\delta t + \frac{\alpha}{\delta}\operatorname{sh}\delta t\right). \quad (3.68)$$

Так как $0 < \delta < \alpha$, то график (3.68) имеет вид, указанный на рис. 30 (*апериодический процесс*).

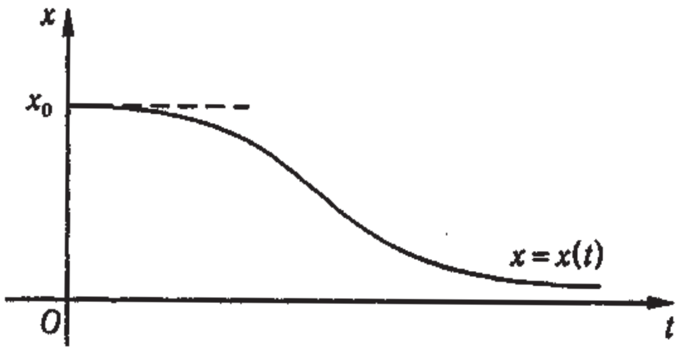

Рис. 30

Случай 2. Пусть

$$\alpha^2 - \beta^2 = \delta^2 = 0.$$

Решение задачи можно получить из формулы (3.68) путем перехода к пределу при $\delta \to 0$. В результате будем иметь

$$x = x_0 e^{-\alpha t}(1 + \alpha t). \quad (3.69)$$

Явление имеет примерно тот же характер, как и в случае 1.

Случай 3. Пусть

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\delta^2 < 0.$$

Физически это обозначает, что упругая сила велика по сравнению с сопротивлением среды. Корни характеристического уравнения в этом случае комплексные

$$p_1 = -\alpha + i\delta, \quad p_2 = -\alpha - i\delta.$$

Отсюда общее решение уравнения (3.59) имеет вид

$$x = e^{-\alpha t}(C_1 \cos\delta t + C_2 \sin\delta t). \quad (3.70)$$

Так как; очевидно,

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha e^{-\alpha t}(C_1\cos\delta t + C_2\sin\delta t) +$$
$$+ \delta e^{-\alpha t}(-C_1\sin\delta t + C_2\cos\delta t),$$

то, полагая $t = 0$, на основании начальных условий (3.60) получим

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= x_0 \\ -\alpha C_1 + \delta C_2 &= 0 \end{aligned}\right\},$$

откуда

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\alpha}{\delta}x_0 \tag{3.71}$$

и, следовательно,

$$x = x_0 e^{-\alpha t}\left(\cos\delta t + \frac{\alpha}{\delta}\sin\delta t\right). \tag{3.72}$$

График решения (3.72) изображен на рис. 31 (*затухающие колебания*), где положено $\bar{x}_0 = x_0\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\delta^2}}$. Период колебаний, очевидно, равен

$$T = \frac{2\pi}{\delta}.$$

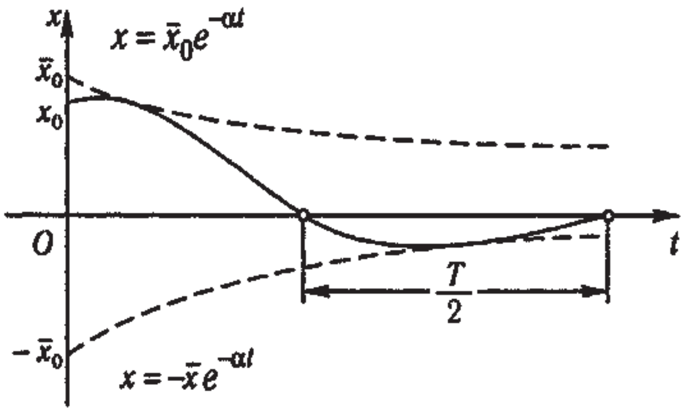

Рис. 31

Таким образом, все случаи решений линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами допускают наглядную физическую интерпретацию.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Определить период T свободных колебаний двухрессорного вагона веса P кг, если под статическим действием веса вагона каждая из рессор прогибается на 5 см.

2. Тело весом $P = 10$ кг колеблется под действием упругой силы, равной 20 кг, при смещении в 1 м, причем сопротивление среды пропорционально скорости. Найти закон колебаний и период колебания, если тело было выведено из положения равновесия путем сообщения ему начальной скорости $v_0 = 5$ м/с и после 3-х колебаний амплитуда уменьшилась в 10 раз.

§ 7. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение второго порядка

$$y'' + ay' + by = f(x), \tag{3.73}$$

коэффициенты которого a и b — постоянны.

Теорема. Общее решение линейного неоднородного уравнения (3.73) есть сумма общего решения соответствующего линейного однородного уравнения и какого-нибудь частного решения данного неоднородного уравнения.

Доказательство. Пусть $Y = Y(x)$ — частное решение данного линейного неоднородного уравнения (3.73), т. е.

$$Y'' + aY' + bY = f(x). \tag{3.74}$$

Вычитая почленно из уравнения (3.73) уравнение (3.74), будем иметь

$$(y-Y)'' + a(y-Y)' + b(y-Y) = 0. \tag{3.75}$$

Таким образом, разность $y - Y = y_0$ является решением соответствующего линейного однородного уравнения. Отсюда

$$y = y_0 + Y, \tag{3.76}$$

где y_0 — есть решение уравнения

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{3.77}$$

Если в формуле (3.76) считать y_0 общим решением линейного однородного уравнения (3.77), то эта формула, очевидно, дает общее решение линейного неоднородного уравнения (3.73).

Тeopeме доказана.

§ 8. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЛИНЕЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим колебания гармонического осциллятора при наличии переменной внешней силы $mf(t)$, где m — масса точки. Придерживаясь обозначений § 6, получаем следующее уравнение движения:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \beta^2 x = f(t), \tag{3.78}$$

где α и β — постоянны. Колебания механической системы при наличии возмущающей внешней силы называются вынужденными, а при отсутствии ее — свободными. Таким образом, однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка описывает свободные колебания гармонического осциллятора, а неоднородное — вынужденные колебания. С этой точки зрения формула (3.76) имеет следующий смысл: общие вынужденные колебания системы есть сумма некоторых ее вынужденных колебаний и соответствующих свободных колебаний системы.

§ 9. НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Пусть дано линейное неоднородное уравнение

$$y'' + ay' + by = f(x), \tag{3.79}$$

коэффициенты которого a и b — постоянные. Как известно, общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = y_0 + Y, \tag{3.80}$$

где y_0 — общее решение соответствующего однородного уравнения, а Y — *частное решение данного неоднородного уравнения*.

В § 5 было показано как находится функция y_0. Следовательно, остается дать метод нахождения частного решения Y по заданной правой части $f(x)$ дифференциального неоднородного уравнения (3.79). Мы ограничимся здесь лишь рассмотрением отдельных частных случаев; общий прием для уравнений любого порядка будет дан в следующей главе.

А. Правая часть есть многочлен, т. е.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m. \tag{3.81}$$

1. Если $b \neq 0$, то полагаем

$$Y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m. \tag{3.82}$$

2. Если $b = 0$ и $a \neq 0$, то полагаем

$$Y = x(A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m), \tag{3.83}$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_m$ — неопределенные коэффициенты.

Правильность этих рассуждений будет доказана впоследствии. Для определения коэффициентов $A_0, A_1, \ldots, A_m$ подставляем выражение (3.82) [или соответственно (3.83)] в левую часть уравнения (3.79) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x. Полученная алгебраическая система линейных уравнений, как можно доказать, является совместной и, следовательно, дает возможность найти коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, A_m$.

Пример. Решить уравнение

$$y'' + y' - 12y = x^2.$$

Решение. Корни характеристического уравнения

$$k^2 + k - 12 = 0,$$

очевидно, есть $k_1 = 3$, $k_2 = -4$. Поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = C_1e^{3x} + C_2e^{-4x},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Так как $b = -12 \neq 0$, то ищем частное решение неоднородного уравнения в следующем виде:

$$Y = A_0 + A_1x + A_2x^2.$$

Отсюда

$$2A_2 + (A_1 + 2A_2)x - 12(A_0 + A_1x + A_2x^2) \equiv x^2$$

или

$$-12A_2x^2 + (2A_2 - 12A_1)x + (2A_2 + A_1 - 12A_0) \equiv x^2.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты, получим систему:

$$\left.\begin{aligned} -12A_2 &= 1, \\ 2A_2 - 12A_1 &= 0, \\ 2A_2 + A_1 - 12A_0 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$A_2 = -\frac{1}{12}, \quad A_1 = -\frac{1}{72}, \quad A_0 = -\frac{13}{864}$$

и, следовательно,

$$Y = -\left(\frac{13}{864} + \frac{1}{72}x + \frac{1}{12}x^2\right).$$

В силу формулы (3.80) общее решение данного уравнения есть

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-4x} - \frac{1}{864}(13 + 12x + 72x^2).$$

Б. Правая часть есть гармоника, т. е.

$$f(x) = M\sin\omega x + N\cos\omega x, \tag{3.84}$$

где M, N — постоянные.

1. Ищем частное решение уравнения (3.79) также в виде гармоники

$$Y = A\sin\omega x + B\cos\omega x, \qquad (3.85)$$

где A, B — постоянные. Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение (3.79), будем иметь

$$(-A\omega^2\sin\omega x - B\omega^2\cos\omega x) + a(A\omega\cos\omega x - B\omega\sin\omega x) +$$
$$+ b(A\sin\omega x + B\cos\omega x) \equiv M\sin\omega x + N\cos\omega x,$$

или

$$\left.\begin{aligned} A(-\omega^2 + b) - Ba\omega &= M, \\ Aa\omega + B(-\omega^2 + b) &= N. \end{aligned}\right\} \qquad (3.86)$$

Система (3.86) заведомо совместна, если ее определитель не равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\omega^2 + b & -a\omega \\ a\omega & -\omega^2 + b \end{vmatrix} = (\omega^2 - b)^2 + a^2\omega^2 \neq 0. \qquad (3.87)$$

В этом случае коэффициенты A и B легко могут быть определены.

2. Если $a = 0$ и $b = \omega^2$, то $\Delta = 0$ и система (3.86) несовместна. В этом исключительном случае функцию Y следует брать более сложного вида:

$$Y = x(A\sin\omega x + B\cos\omega x). \qquad (3.88)$$

З а м е ч а н и е. Если правая часть $f(x)$ зависит только от $\sin\omega x$ или только от $\cos\omega x$, то в формуле (3.85), как и в общем случае, следует брать и $\sin\omega x$, и $\cos\omega x$, так как при дифференцировании синус переходит в косинус и обратно.

Пример. Найти вынужденные колебания системы

$$\frac{d^2x}{dt} + \beta^2 x = M\sin\omega t. \qquad (3.89)$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение здесь имеет вид

$$k^2 + \beta^2 = 0;$$

отсюда $k_{1,2} = \pm\beta i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения таково:

$$x_0 = C_1\sin\beta t + C_2\cos\beta t. \qquad (3.90)$$

При нахождении частного решения X неоднородного уравнения (3.89) приходится различать два случая.

С л у ч а й 1. Пусть $|\omega| \neq |\beta|$, т. е. период внешней силы не совпадает с периодом свободных колебаний (3.90).

Ищем функцию X в виде

$$X = A\sin\omega t + B\cos\omega t.$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.89), будем иметь

$$(-A\omega^2\sin\omega t - B\omega^2\cos\omega t) + \beta^2(A\sin\omega t + B\cos\omega t) \equiv M\sin\omega t,$$

отсюда

$$A(\beta^2 - \omega^2) = M,$$

$$B(\beta^2 - \omega^2) = 0,$$

то есть

$$A = \frac{M}{\beta^2 - \omega^2}, \quad B = 0$$

и, следовательно,

$$X = \frac{M}{\beta^2 - \omega^2}\sin\omega t, \tag{3.91}$$

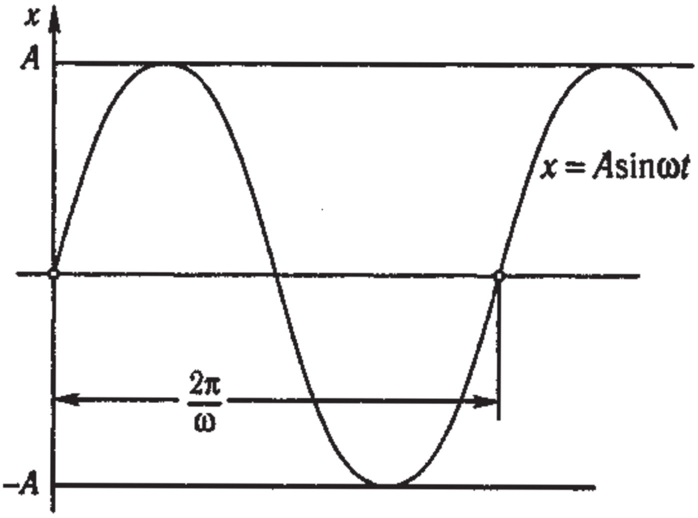

Рис. 32

Таким образом, в этом случае у системы имеются вынужденные ограниченные колебания (3.91), период которых равен периоду внешней силы (рис. 32).

С л у ч а й 2. Пусть $|\omega| = |\beta|$, т. е. период внешней силы совпадает с периодом свободных колебаний.

В этом случае формула (3.91), очевидно, теряет смысл. Согласно теории полагаем

$$X = t(A\sin\omega t + B\cos\omega t). \tag{3.92}$$

Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение (3.89), будем иметь

$$t(-A\omega^2\sin\omega t - B\omega^2\cos\omega t) + 2(A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t) +$$
$$+ \omega^2 t(A\sin\omega t + B\cos\omega t) \equiv M\sin\omega t$$

или

$$2(A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t) \equiv M\sin\omega t.$$

Отсюда

$$A = 0, \quad B = -\frac{M}{2\omega}$$

и, следовательно,

$$X = -\frac{Mt}{2\omega}\cos\omega t. \tag{3.93}$$

Формула (3. 93) показывает, что размах колебаний X неограниченно растет со временем t (рис. 33). Таким образом, даже малая внешняя сила в случае 2 вызывает неограниченные колебания. Это явление носит название резонанса. Физическим последствием резонанса является нарушение работы или даже разрушение системы. Известны случаи, когда ритмический стук колес поезда, идущего по железнодорожному мосту, приводил к разрушению этого моста. В силу тех же обстоятельств, колонну солдат, идущих по мосту, заставляют идти «не в ногу».

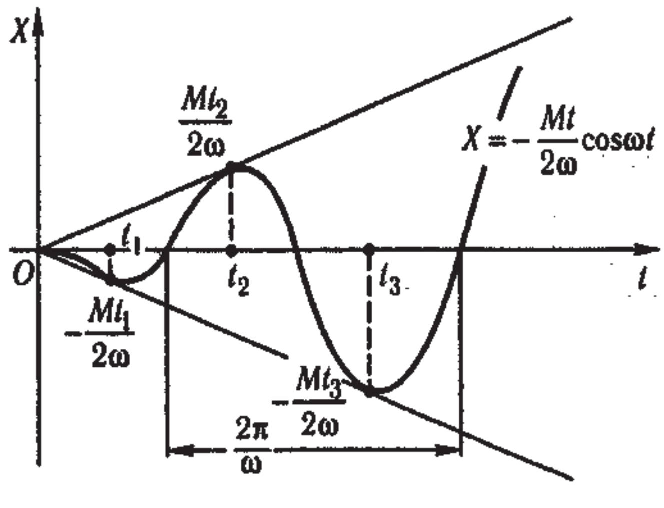

Рис. 33

Общие вынужденные колебания системы (3.89) даются формулой

$$x = C_1\sin\beta t + C_2\cos\beta t + X. \tag{3.94}$$

Для удобства запоминания рассмотренные случаи сведены в таблицу:

Таблица частных решений уравнения $y'' + ay' + by = f(x)$

Случай		Характер правой части	Частное решение
I	1	$f(x)=P_n(x)$, где $P_n(x)$ — многочлен n-ой степени и $b=0$	$Y=Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ — многочлен n-ой степени
	2	$f(x)=P_n(x)$ и $b=0,\ a\neq 0$	$Y=xQ_n(x)$
II	1	$f(x)=M\sin\omega x+N\cos\omega x$, $(\omega^2-b)^2+a^2\omega^2\neq 0$	$Y=A\sin\omega x+B\cos\omega x$
	2	$f(x)=M\sin\omega x+N\cos\omega x$, $a=0,\quad b=\omega^2$	$Y=x(A\sin\omega x+B\cos\omega x)$

Задания для самостоятельного решения

1. $y'' + 2y' + x^2 = 0$.

2. Найти частное решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = 2x-4,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0)=0,\quad y'(0)=2.$$

3. $y'' - 2y' + 2y = \sin x + \cos x$.

4. $y'' + 100y = \cos 10x$.

5. Груз массой $m = 4$ кг подвешен на пружине и увеличивает ее длину на 1 см. Найти закон движения груза, если верхний конец пружины совершает вертикальное гармоническое колебание $y = \sin 30t$ (сопротивлением среды пренебрегаем).

§ 10. О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для уравнений второго порядка можно рассматривать вопрос не только о нахождении решения по заданным в *одной* точке *начальным условиям*, определяющим в указанной точке значения как самого решения уравнения, так и его производной (*задачу Коши*), но и о поиске решения по *граничным условиям* в *двух* фиксированных точках, задающих в них (как в концах соответствующего промежутка) информацию о решении уравнения и (или) его производной (*краевую задачу*). Поясним постановку краевой задачи на конкретных примерах.

Пример 1. Найти функцию $y=y(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$y'' = f(x, y, y') \tag{3.95}$$

и принимающую при $x=a$ и $x=b$ $(a<b)$ заданные граничные значения:

$$y(a)=A,\quad y(b)=B. \tag{3.96}$$

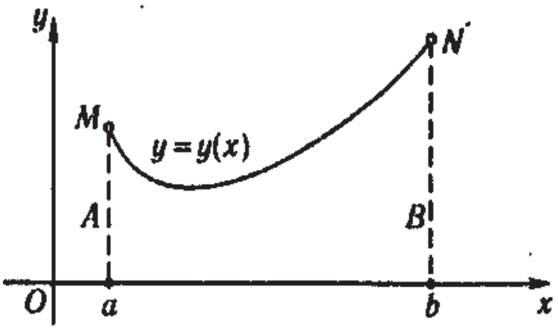

Рис. 34

Геометрически сказанное означает, что в плоскости Oxy требуется найти интегральную кривую дифференциального уравнения (3.95), проходящую через две заданные точки $M(a, A)$ и $N(b, B)$ (см. рис. 34).

Пример 2. Видоизменением задачи, приведенной в примере 1, будет: найти такое решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (3.95), для которого выполнялись бы граничные условия

$$y'(a) = A_1, \quad y'(b) = B_1. \tag{3.97}$$

Геометрически это сводится к отысканию в плоскости Oxy интегральной кривой уравнения (3.95), пересекающей прямые $x = a$ и $x = b$ под заданными соответственно углами α и β такими, что $\operatorname{tg}\alpha = A_1$, $\operatorname{tg}\beta = B_1$ (см. рис. 35).

Пример 3. Можно рассмотреть также следующую задачу: найти решение $y = y(x)$ уравнения (3.95), удовлетворяющее граничным условиям

$$y(a) = A, \quad y'(b) = B_1. \tag{3.98}$$

В этой ситуации в плоскости Oxy требуется найти интегральную кривую дифференциального уравнения (3.95), которая должна пройти через точку $M(a, A)$ и пересечь прямую $x = b$ под углом β (см. рис. 36).

В случае *линейного* дифференциального уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{3.99}$$

коэффициенты которого на рассматриваемом промежутке $[a, b]$ непрерывны, *линейные* граничные условия описываются равенствами

$$\alpha y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad \beta y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \tag{3.100}$$

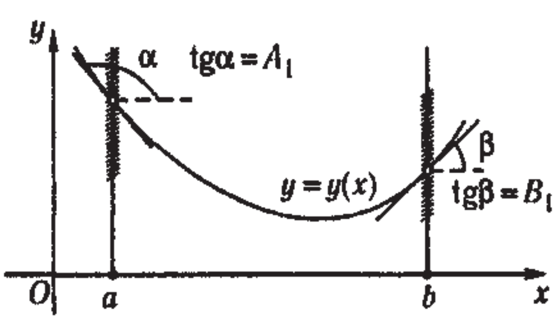

Рис. 35

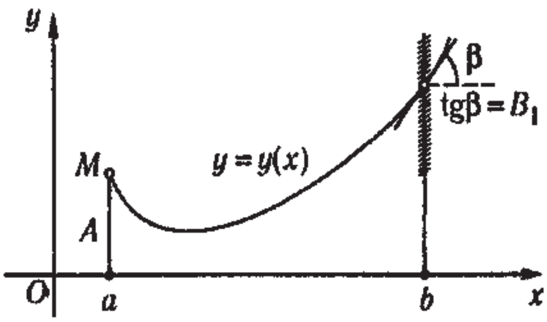

Рис. 36

где α, α_1, β, β_1, A, B — одновременно не равные нулю заданные постоянные числа (*линейная краевая задача*). Линейная краевая задача (3.99)–(3.100) называется *однородной*, если, во-первых, $f(x) \equiv 0$ (т. е. само дифференциальное уравнение (3.99) однородно) и, во-вторых, $A = B = 0$ (т. е. граничные условия также однородны); в противном случае краевая задача (3.99)–(3.100) называется *неоднородной*.

Краевая задача для уравнений второго порядка (в том числе и для *линейных однородных* уравнений, и даже при наличии у них *постоянных коэффициентов*) может совсем не иметь решений, иметь единственное решение или же иметь множество решений.

Пример 4. Для линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$y'' + y = 0, \qquad (3.101)$$

общее решение которого имеет вид

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x \qquad (3.102)$$

(см. таблицу в § 5 главы III), рассмотрим три краевые задачи со следующими граничными условиями:

$$1)\ \ y(0) = 0,\ \ y(\pi) = -1; \qquad (3.103)$$

$$2)\ \ y(0) = 0,\ \ y(\pi/2) = 1; \qquad (3.104)$$

$$3)\ \ y(0) = 0,\ \ y(\pi) = 0. \qquad (3.105)$$

Краевая задача (3.101), (3.103) не имеет решения, так как из формулы (3.102), в силу (3.103), для него должны были бы выполняться равенства $0 = C_2 = 1$, что невозможно.

Краевая задача (3.101), (3.104) имеет единственное решение $y = \sin x$, поскольку из (3.102) и (3.104) получаем $C_1 = 1$, $C_2 = 0$.

Краевая задача (3.101), (3.105) имеет бесконечно много решений вида $y = C_1 \sin x$, где C_1 — произвольная постоянная, ибо в силу первого в (3.105) граничного условия находим $C_2 = 0$, а второе граничное условие в (3.105) тогда будет выполняться при любом выборе константы C_1.

Для конкретного решения линейной краевой задачи сначала нужно постараться найти *общее решение* исходного дифференциального уравнения, после этого, используя граничные условия, следует *выписать алгебраическую систему уравнений* относительно входящих в общее решение произвольных констант, а затем *вычислить* (если это возможно) *значения этих констант* как решений выписанной системы уравнений. Частным решением дифференциального уравнения, отвечающим найденным значениям констант, и будет определяться решение рассматриваемой краевой задачи.

Пример 5. Найти решение уравнения

$$y'' - y = x, \tag{3.106}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \tag{3.107}$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение $k^2 - 1 = 0$ имеет корни $k_{1,\,2} = \pm 1$. Следовательно общее решение соответствующего однородного уравнения можно записать в виде $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, где C_1, C_2 — произвольные константы.

Поскольку коэффициент уравнения (3.107) при y равен $-1 \neq 0$, то (согласно § 9 главы III) частное решение неоднородного уравнения (3.107) будем искать в виде $Y = \mu + \nu x$. Отсюда $-(\mu + \nu x) \equiv x$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получаем $\mu = 0$, $\nu = -1$, и тем самым $Y = -x$. Поэтому общее решение уравнения (3.107) есть

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x. \tag{3.108}$$

Так как из (3.108) имеем

$$y(0) = C_1 + C_2, \quad y(1) = C_1 e + \frac{C_2}{e} - 1,$$

то из граничных условий (3.107) получаем систему уравнений для определения C_1, C_2:

$$\left.\begin{aligned} &C_1 + C_2 = 0, \\ &eC_1 + \frac{1}{e}C_2 - 1 = 1. \end{aligned}\right\} \tag{3.109}$$

Из первого уравнения системы (3.109) получаем $C_2 = -C_1$, а потому второе уравнение системы приводит нас к равенству $eC_1 - \frac{1}{e}C_1 = 2$. Следовательно,

$$C_1 = \frac{2}{e - \frac{1}{e}} = \frac{1}{\operatorname{sh} 1}, \quad C_2 = -\frac{1}{\operatorname{sh} 1},$$

т. е. решение искомой краевой задачи однозначно определяется функцией

$$y = \frac{e^x}{\operatorname{sh} 1} - \frac{e^{-x}}{\operatorname{sh} 1} - x = 2\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} - x. \tag{3.110}$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие краевые задачи:

1. $y'' - y = 0$; $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 1$.

2. $y'' + y = 1$; $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

3. $y'' + y = 0$; $y'(0) = 0$, $y'(\pi) = 1$.

4. $y'' + y = 2x - \pi$; $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

Глава IV

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

§ 1. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{4.1}$$

Здесь имеет место следующая общая теорема, которую мы приведем без доказательства.

Теорема. Пусть $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — некоторая система чисел, а правая часть f уравнения (4.1) непрерывна и имеет ограниченные производные по аргументам $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ в области

$$|x - x_0| < a,\ |y - y_0| < b,\ |y' - y_0'| < b_1,\ \ldots$$
$$\ldots,\ |y^{(n-1)} - y_0^{n-1}| < b_{n-1}. \tag{4.2}$$

где $a, b, b_1, \ldots, b_{n-1}$ — положительные числа.

В таком случае существует единственное решение уравнения (4.1)

$$y = \varphi(x) \quad (|x - x_0| < h), \tag{4.3}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y_0', \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{4.4}$$

Решение уравнения (4.1)

$$y = \varphi(x_1, C_1, \ldots, C_n), \tag{4.5}$$

содержащее n произвольных постоянных (параметров) $C_1, \ldots, C_n$, с помощью выбора которых можно получить решение (4.3) (*частное решение*), удовлетворяющее любым начальным условиям (4.4)*, называется *общим*.

В частности, если условия предыдущей теоремы при некотором $x = x_0$ выполнены для всех значений чисел

$$y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)},$$

то эти числа можно рассматривать как параметры, входящие в состав решения (4.3); чтобы получить общее решение (4.5), достаточно положить

$$C_1 = y_0, C_2 = y_0', \ldots, C_n = y_0^{(n-1)}.$$

---

* Вообще говоря, в известной области.

Если семейство этих решений заполняет область G, то в силу выполнения свойства единственности общее решение (4.5) дает совокупность всех решений дифференциального уравнения (4.1) в области G.

Определение. Соотношение

$$\Phi(x, y, C_1, ..., C_n) = 0 \tag{4.6}$$

называется *общим интегралом* дифференциального уравнения (4.1), если при любых значениях постоянных $C_1, ..., C_n$ определяемые им кривые являются интегральными, причем среди семейства кривых (4.6) найдутся интегральные кривые, удовлетворяющие произвольным начальным условиям.

Если в некоторой области G для уравнения (4.1) выполнены условия теоремы существования и единственности решений, то любая интегральная кривая уравнения (4.1), расположенная в G, может быть получена из уравнения (4.6) при соответствующем выборе постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$. В этом случае общий интеграл дает полное решение задачи интегрирования дифференциального уравнения в данной области. В общем случае могут существовать решения уравнения (4.1), не входящие в его общий интеграл.

Иногда для уравнения (4.1) удается получить дифференциальное уравнение более низкого порядка $n-k$ $(1 \leq k < n)$:

$$\Phi_k(x, y, y', ..., y^{(n-k)}, C_1, ..., C_k) = 0, \tag{4.7}$$

содержащее k произвольных постоянных $C_1, ..., C_n$, следствием которого является данное дифференциальное уравнение, т. е. найти такое уравнение (4.7), что каждое его решение y есть также решение уравнения (4.1). В таком случае соотношение (4.7) называется k-ым *промежуточным интегралом*, а при $k = 1$ — *первым интегралом*. В простейших случаях процесс решения дифференциального уравнения (4.1) состоит в построении цепочки промежуточных интегралов; интегрируя $(n-1)$-й промежуточный интеграл, получим общий интеграл (4.6) уравнения (4.1).

Пример. Пусть имеем уравнение

$$y''' = 1. \tag{4.8}$$

Решение. Последовательно интегрируя, получаем промежуточные интегралы

$$y'' = x + C_1$$

и

$$y' = \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2.$$

Отсюда общий интеграл уравнения (4.8) есть

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Общее уравнение n-го порядка, не разрешенное относительно старшей производной $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, эквивалентно, вообще говоря, нескольким уравнениям вида (4.1). Соотношение, равносильное совокупности общих интегралов всех этих последних уравнений, называется общим интегралом данного уравнения (см. гл. I, § 2).

§ 2. УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Рассмотрим общее дифференциальное уравнение n-го порядка

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{4.9}$$

Укажем несколько случаев, когда порядок этого уравнения легко может быть понижен.

Случай 1. Левая часть уравнения (4.9) не содержит x, т. е. уравнение имеет вид

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{4.10}$$

Примем y за новую независимую переменную, а $y' = p$ за новую неизвестную функцию. Применяя правило дифференцирования сложной функции, последовательно получаем

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy}\frac{dy}{dx} = p\left[p\frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right]$$

. . . .

и т. д. Подставляя эти выражения в уравнение (4.10), получим дифференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка следующего вида:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0.$$

Пример. Найти частное решение уравнения

$$y'y''' = 2y'^3 + y''^2,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0.$$

Р е ш е н и е. Полагая $y' = p$, получим

$$p\left[p^2 \frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right] = 2p^3 + \left(p\frac{dp}{dy}\right)^2$$

или

$$p^3\left(\frac{d^2p}{dy^2} - 2\right) = 0.$$

Так как в силу начальных условий $p \not\equiv 0$, то отсюда

$$\frac{d^2p}{dy^2} = 2.$$

Интегрируя обе части этого уравнения два раза по переменной y, последовательно будем иметь

$$\frac{dp}{dy} = 2y + C_1$$

и

$$p = y^2 + C_1 y + C_2.$$

Из начальных условий, учитывая, что $\frac{dp}{dy} = \frac{1}{p} y''$, получаем

$$0 = 0 + C_1 \quad \text{и} \quad 1 = C_2,$$

откуда

$$C_1 = 0 \quad \text{и} \quad C_2 = 1$$

и, следовательно,

$$p \equiv \frac{dy}{dx} = y^2 + 1.$$

Разделяя переменные в последнем уравнении, находим

$$\frac{dy}{y^2+1} = dx,$$

откуда

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx,$$

то есть

$$\operatorname{arctg} y = x + C_3.$$

Из начальных условий имеем

$$0 = 0 + C_3,$$

то есть $C_3 = 0$. Поэтому окончательно искомое решение таково:

$$y = \operatorname{tg} x.$$

Случай 2. Левая часть уравнения (4.9) не содержит y, т. е. уравнение имеет вид

$$F\left(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)=0. \tag{4.11}$$

Полагая

$$y'=p,\ y''=p',\ \ldots,\ y^{(n)}=p^{(n-1)},$$

получим уравнение $(n-1)$-го порядка

$$F\left(x, p, p', \ldots, p^{(n-1)}\right)=0$$

относительно неизвестной функции p.

Если в уравнении (4.11) вместе с y отсутствуют и производные $y', \ldots, y^{(k-1)}$ $(k<n)$, т. е. уравнение имеет вид

$$F\left(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}\right)=0, \tag{4.12}$$

то, применяя подстановку $y^{(k)}=z$, получим дифференциальное уравнение

$$F\left(x, z, \ldots, z^{(n-k)}\right)=0,$$

порядок которого на k единиц ниже порядка исходного уравнения.

Пример. Решить уравнение

$$xy'''-y''=1.$$

Решение. Полагая

$$y''=z,$$

будем иметь

$$xz'-z=1.$$

Отсюда

$$\frac{dz}{z+1}=\frac{dx}{x}$$

и, следовательно,

$$\ln|z+1|=\ln C+\ln x.$$

Таким образом,

$$z \equiv y''=-1+C_1 x.$$

Интегрируя два раза последнее уравнение, окончательно получим

$$y=-\frac{1}{2}x^2+C_1x^3+C_2x+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Случай 3. Левая часть уравнения (4.9) однородна относительно переменных y, $y', \ldots, y^{(n)}$, т. е. для любого k имеет место тождество

$$F\left(x, ky, ky', \ldots, ky^{(n)}\right) \equiv k^{\alpha} F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right),$$

где α — некоторое постоянное число (*показатель однородности*).

Положим
$$y = e^{\int u\,dx},$$
где u — новая неизвестная функция. Отсюда последовательно находим
$$y' = yu, \quad y'' = y(u' + u^2), \ldots$$
и т. д. Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение (4.9) получим
$$F(x, y, yu, \ldots) = 0,$$
или в силу однородности функции F будем иметь
$$y^{\alpha} F(x, 1, u, \ldots) = 0,$$
где α — показатель однородности. Отсюда получаем, что функция u удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению $(n-1)$-го порядка
$$F_1(x, u, u', \ldots, u^{(n-1)}) = 0.$$

Кроме того, если $\alpha > 0$, то $y = 0$, очевидно, является решением данного уравнения.

Пример. Решить уравнение
$$xyy'' - xy'^2 = yy'.$$

Решение. Уравнение, очевидно, является однородным относительно y, y' и y''.

Полагая
$$y = e^{\int u\,dx},$$
получим
$$xy^2(u' + u^2) - xy^2u^2 = y^2u,$$
или, если $y \neq 0$, то
$$x\frac{du}{dx} = u.$$

Отсюда
$$u = Cx$$
и, следовательно,
$$y = e^{\int Cx\,dx} = e^{C_1x^2 + \ln C_2},$$
или окончательно
$$y = C_2e^{C_1x^2},$$
где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Решение $y = 0$ получается при $C_2 = 0$.

§ 3. ОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Общий вид линейного дифференциального уравнения n-го порядка следующий:
$$y^{(n)} + f_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)\,y = f(x), \tag{4.13}$$

где функции $f_k(x)$ $(k = 1, \ldots, n)$ — называются *коэффициентами уравнения*, а $f(x)$ — его *правой частью* или *свободным членом*. Если $f(x) \equiv 0$, то линейное уравнение называется *однородным*, в противном случае — неоднородным. Мы будем предполагать, что функции

$\{f_k(x)\}_{k=1}^{n}$ и $f(x)$ непрерывны на некотором общем (конечном или бесконечном) интервале (a, b). Разрешая уравнение (4.13) относительно старшей производной $y^{(n)}$, будем иметь

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{4.14}$$

где

$$F = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f_{n-k}(x) y^{(k)}. \tag{4.15}$$

Так как

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} = -f_{n-k}(x) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

согласно предположению непрерывны при $a < x < b$, то на основании теоремы существования и единственности решений (§ 1) для любой системы чисел x_0 $(a < x_0 < b)$, $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ существует решение

$$y = \varphi(x) \tag{4.16}$$

и притом единственное, такое, что

$$y_0^{(k)} = \varphi^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Можно доказать, что это частное решение имеет смысл во всем интервале (a, b).

Мы займемся сначала однородным линейным дифференциальным уравнением

$$y^{(n)} + f_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x) y = 0. \tag{4.17}$$

Заметим, что это уравнение имеет очевидное решение

$$y \equiv 0, \tag{4.18}$$

однозначно определяемое нулевыми начальным условиям

$$y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0, \tag{4.19}$$

носящее название нулевого или тривиального. В дальнейшем мы, как правило, будем заниматься нетривиальными решениями.

Уравнение (4.17) для сокращения будем записывать в виде

$$L[y] = 0, \tag{4.20}$$

где

$$L[y] = y^{(n)} + f_1(x)^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)\, y. \tag{4.21}$$

Выражение $L[y]$ называется *линейным дифференциальным оператором* и представляет собой некоторую функцию, которая получается из y в результате выполнения указанных действий (4.21). Например, если

$$L[y] = y'' - 2xy' + x^2y,$$

то

$$L[x] = 0 - 2x \cdot 1 + x^2 \cdot x = x^3 - 2x,$$

$$L[x^2] = 2 - 2x \cdot 2x + x^2 \cdot x^2 = x^4 - 4x^2 + 2 \text{ и т. д.}$$

С этой точки зрения решениями уравнения (4.20) являются те и только те функции $y = y(x)$, которые обращают оператор $L[y]$ в нуль.

Укажем два основных свойства оператора $L[y]$.

Свойство 1. Постоянный множитель можно выносить за знак линейного оператора.

В самом деле, если C — постоянная, то имеем

$$L(Cy) = (Cy)^{(n)} + f_1(x)(Cy)^{(n-1)} + \dots + f_n(x)(Cy) =$$

$$= C[y^{(n)} + f_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + f_n(x)\, y] = CL[y],$$

то есть

$$L[Cy] = CL[y]. \qquad (4.22)$$

Свойство 2. Линейный оператор от суммы равен сумме операторов от слагаемых.

В самом деле, если y_1 и y_2 — функции от x, то имеем

$$L[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)^{(n)} + f_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \dots$$

$$\dots + f_n(x)(y_1 + y_2) = [y_1^{(n)} + f_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots f_n(x)y_1] +$$

$$+ [y_2^{(n)} + f_1(x)y_2^{(n-1)} + \dots + f_n(x)y_2] = L[y_1] + L[y_2],$$

то есть

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]. \qquad (4.23)$$

Следствие. Линейный оператор от линейной комбинации нескольких функций равен такой же линейной комбинации операторов этих функций.

Действительно, если C_1 и C_2 — постоянные, то последовательно имеем

$$L[C_1y_1 + C_2y_2] = L[C_1y_1] + L[C_2y_2] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2],$$

то есть

$$L[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2] \qquad (4.24)$$

(*свойство линейности*).

Установим некоторые важные свойства решения линейного однородного уравнения (4.20).

Теорема 1. Произведение решения линейного однородного уравнения на постоянную есть также решение этого уравнения.

В самом деле, если C — постоянная величина и y_1 — решение уравнения (4.20), т. е.

$$L[y_1]=0,$$

то в силу свойства 1 имеем

$$L[Cy_1]=CL[y_1]=0.$$

Следовательно, Cy_1 — также решение этого уравнения.

Теорема 2. Сумма двух решений линейного однородного уравнения есть также решение этого уравнения.

В самом деле, если y_1 и y_2 — решения уравнения (4.20), т. е.

$$L[y_1]=0 \text{ и } L[y_2]=0,$$

то в силу свойства 2 имеем

$$L[y_1+y_2]=L[y_1]+L[y_2]=0.$$

Следовательно, y_1+y_2 есть также решение уравнения (4.20).

Следствие. Любая линейная комбинация решений линейного однородного уравнения есть также решение этого уравнения.

В самом деле, если $y_1, y_2, \ldots, y_k$ — решение уравнения (4.20) и C_1, $C_2, \ldots, C_k$— постоянные, то

$$L[C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ky_k]=$$
$$=C_1L[y_1]+C_2L[y_2]+\cdots+C_kL[y_k]=0,$$

то есть

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ky_k$$

есть также решение уравнения (4.20).

Таким образом, составляя линейные комбинации из частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_k$ линейного однородного уравнения, мы получаем новые его решения. Возникает вопрос, сколько частных решений и какие именно следует взять, чтобы их линейная комбинация дала все решения данного дифференциального уравнения? Чтобы ответить на это, нужно ввести понятие линейно независимых решений.

Определение 1. Функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$, определенные в общем интервале (a, b), называются *линейно зависимыми* в этом интервале, если существуют постоянные $C_1, C_2, ..., C_k$, из которых по меньшей мере одна не равна нулю, и такие, что

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \cdots + C_k\varphi_k(x) \equiv 0 \qquad (4.25)$$

при $a < x < b$. В противном случае функции называются *линейно независимыми*, т. е. для линейно независимых функций тождество (4.25) может иметь место только в том случае, когда

$$C_1 = C_2 = \cdots = C_k = 0.$$

Заметим, что функция, тождественно равная нулю, не может входить в совокупности линейно независимых функций, так как если, например, $\varphi_1(x) \equiv 0$, то тождество (4.25) будет иметь место при $C_1 = 1$, $C_2 = \cdots = C_k = 0$ и, следовательно, функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_k(x)$ — линейно зависимы.

Пример 1. Функции $1, x, x^2$ — линейно независимы.

Решение. Из тождества

$$C_1 + C_2x + C_3x^2 \equiv 0$$

вытекает

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0.$$

Пример 2. Функции $1, \sin^2 x, \cos^2 x$ — линейно зависимы.

Решение. Действительно, полагая

$$C_1 = -1, \quad C_2 = 1, \quad C_3 = 1,$$

получим тождество

$$-1 \cdot 1 + \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x \equiv 0.$$

Пусть $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ — функции, имеющие непрерывные производные до $(n-1)$-го порядка включительно.

Определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (4.26)$$

называется *определителем Вронского* или *вронскианом* системы функций $y_1, y_2, ..., y_n$.

Т е о р е м а 3. Если функции $y_1, y_2, ..., y_n$ — линейно зависимы, то их вронскиан тождественно равен нулю (на соответствующем промежутке).

Для простоты доказательства ограничимся случаем трех функций, т. е. положим $n = 3$.

Пусть

$$C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 \equiv 0, \tag{4.27}$$

где по меньшей мере одна из постоянных C_1, C_2, C_3 отлична от нуля. Дифференцируя тождество (4.27) последовательно два раза, получим

$$C_1y_1' + C_2y_2' + C_3y_3' \equiv 0,$$

$$C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_3y_3'' \equiv 0. \tag{4.28}$$

Фиксируя $x = \tilde{x}$, будем рассматривать постоянные C_1, C_2, C_3 как известные. Тогда уравнение (4.27), (4.28) представляют собой алгебраическую линейную однородную систему, заведомо допускающую ненулевые решения, так как не все C_k ($k = 1, 2, 3$) равны нулю. Это, как известно, возможно лишь в том случае, если определитель этой системы, представляющий собой вронскиан функций y_1, y_2, y_3, равен нулю, то есть

$$W(\tilde{x}) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = 0. \tag{4.29}$$

Так как это рассуждение справедливо для любого $\tilde{x}$, то $W(x) \equiv 0$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Если вронскиан системы функций $y_1, y_2, ..., y_n$ отличен от нуля хотя бы в одной точке, то эти функции линейно независимы.

Предположим теперь, что y_1, y_2, ..., y_n есть решения уравнения (4.20). Тогда справедлива обратная теорема:

Т е о р е м а 4. Если вронскиан системы решений $y_1, y_2, ..., y_n$ линейного однородного уравнения (4.20) равен нулю хотя бы в одной точке интервала (a, b), то эти решения линейно зависимы.

При доказательстве для простоты ограничимся случаем $n = 3$.

Пусть $W(x_0) = 0$, где $a < x_0 < b$.

Рассмотрим следующее решение:

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + C_3y_3(x), \tag{4.30}$$

где $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $y_3 = y_3(x)$ — данные решения и C_1, C_2, C_3 — некоторые постоянные. Подберем постоянные C_1, C_2, C_3 так, чтобы были выполнены условия

$$y(x_0)=0, \quad y'(x_0)=0, \quad y''(x_0)=0. \tag{4.31}$$

Из формулы (4.30) следует, что постоянные C_1, C_2, C_3 удовлетворяют системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + C_3y_3(x_0)=0,\\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) + C_3y_3'(x_0)=0,\\ C_1y_1''(x_0) + C_2y_2''(x_0) + C_3y_3''(x_0)=0. \end{aligned}\right\} \tag{4.32}$$

Так как по условию определитель этой системы равен нулю, т. е.

$$W(x_0)=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & y_3(x_0)\\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & y_3'(x_0)\\ y_1''(x_0) & y_2''(x_0) & y_3''(x_0) \end{vmatrix}=0,$$

то система (4.32) допускает ненулевое решение

$$C_1=\bar{C}_1, \quad C_2=\bar{C}_2, \quad C_3=\bar{C}_3.$$

Тогда решение

$$\bar{y}=\bar{C}_1y_1(x)+\bar{C}_2y_2(x)+\bar{C}_3y_3(x) \tag{4.33}$$

будет удовлетворять начальным условиям (4.31). С другой стороны, тривиальное решение

$$y=0 \tag{4.34}$$

также, очевидно, удовлетворяет начальным условиям (4.31). В силу теоремы единственности эти два решения должны совпадать во всем интервале (a, b). Следовательно,

$$\bar{C}_1y_1(x)+\bar{C}_2y_2(x)+\bar{C}_3y_3(x)\equiv 0,$$

причем не все числа C_1, C_2, C_3 равны нулю. Это значит, что решения y_1, y_2, y_3 линейно зависимы.

Теорема доказана.

Следствие. Если решения y_1, y_2, ..., y_n линейного однородного уравнения линейно независимы, то вронскиан их не равен нулю ни в одной точке интервала (a, b).

О п р е д е л е н и е 2. *Фундаментальной системой решений* линейного однородного уравнения называется любая совокупность линейно независимых частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, число которых равно порядку системы.

Чтобы построить фундаментальную систему решений, достаточно взять произвольную систему n^2 чисел a_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющих единственному условию

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{4.35}$$

и рассмотреть частные решения

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ \ldots, \ y_n = y_n(x), \tag{4.36}$$

определяемые начальными условиями

$$y_k(x_0) = a_{1k}, y_k'(x_0) = a_{2k}, \ldots, y_k^{(n-1)}(x_0) = a_{nk} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $a < x_0 < b$ (эти решения существуют в силу теоремы существования и единственности и определены при $a < x < b$). Решения (4.36) образуют фундаментальную систему решений, так как, очевидно, вронскиан их $W(x)$ при $x = x_0$ отличен от нуля

$$W(x_0) = A \neq 0$$

и, следовательно, в силу следствия к теореме 3 решения (4.36) линейно независимы.

Т е о р е м а 5. Общее решение линейного однородного уравнения (4.20) представляет собой линейную комбинацию его частных решений, образующих некоторую фундаментальную систему решений, т. е. общее решение выражается формулой

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n, \tag{4.37}$$

где $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ — линейно независимые частные решения и $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

Требуется доказать, что формула (4.37) при некотором выборе постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ дает решение $\overline{y} = \overline{y}(x)$, удовлетворяющее любым начальным условиям

$$\overline{y}(x_0) = \overline{y}_0, \ \overline{y}'(x_0) = \overline{y}_0', \ \ldots, \ \overline{y}^{(n-1)}(x_0) = \overline{y}_0^{(n-1)}, \tag{4.38}$$

где $a < x_0 < b$.

Для определения постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ из условий (4.38) получаем неоднородную систему линейных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = \overline{y}_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = \overline{y}_0', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = \overline{y}_0^{(n-1)}. \end{array}\right\} \quad (4.39)$$

Определитель этой системы есть не что иное как значение вронскиана $W(x)$ решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ при $x = x_0$; поэтому этот определитель отличен от нуля

$$W(x_0) \neq 0.$$

Следовательно, система (4.39) совместна и имеет единственное решение

$$C_1 = \overline{C}_1, \ C_2 = \overline{C}_2, \ \ldots, \ C_n = \overline{C}_n.$$

Таким образом, получаем

$$\overline{y} = \overline{C}_1 y_1 + \overline{C}_2 y_2 + \ \ldots + \overline{C}_n y_n,$$

т. е. $\overline{y}$ содержится в совокупности решений (4.37).

Теорема доказана.

Следствие. Если коэффициенты $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ линейного однородного уравнения непрерывны, то формула (4.37) дает все решения этого уравнения.

Задания для самостоятельного решения

1. Исследовать на линейную зависимость следующие системы функций:

а) $x, 2x, x^2$;

б) $\sin x, \cos x$;

в) $x, x+1, x+2$;

г) $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, e^{k_3 x}$, где k_1, k_2 и k_3 — постоянны и $k_1 < k_2 < k_3$.

2. Фундаментальная система решений есть x, x^2, x^3. Найти решение y, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(1) = 0, \ \ y'(1) = 0, \ \ y''(1) = 2.$$

§ 4. НЕОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$L[y] = f(x), \tag{4.40}$$

где

$$L[y] = y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_n(x)y. \tag{4.41}$$

Теорема. Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения есть сумма общего решения соответствующего однородного линейного уравнения и частного решения данного неоднородного линейного уравнения.

В самом деле, пусть $Y = Y(x)$ — частное решение неоднородного линейного уравнения (4.40), т. е.

$$L[y] = f(x). \tag{4.42}$$

Рассмотрим функцию

$$y = \bar{y} + Y, \tag{4.43}$$

где $\bar{y}$ — общее решение соответствующего однородного линейного уравнения

$$L[\bar{y}] = 0. \tag{4.44}$$

Покажем, что y есть общее решение неоднородного линейного уравнения (4.40). Прежде всего y удовлетворяет этому дифференциальному уравнению, так как

$$L[y] = L[\bar{y}] + L[Y] = 0 + f(x) = f(x).$$

Кроме того, из формулы (4.43) можно получить частное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее любым начальным условиям

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}; \tag{4.45}$$

для этого, очевидно, достаточно в качестве $\bar{y} = \bar{y}(x)$ взять частное решение однородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$\bar{y}(x_0) = y_0 - Y(x_0),\quad \bar{y}'(x_0) = y'_0 - Y'(x_0),\ \ldots$$
$$\ldots,\ \bar{y}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - Y^{(n-1)}(x_0)$$

(такое решение заведомо существует).

Таким образом, теорема доказана.

Следствие. Общее решение линейного неоднородного уравнения (4.40) дается формулой

$$y = Y(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k \overline{y}_k(x),$$

где $Y(x)$ — некоторое частное решение этого уравнения, $\overline{y}_1(x)$, $\overline{y}_2(x)$, ..., $\overline{y}_n(x)$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения (4.44) и C_1, C_2, ..., C_n — произвольные постоянные.

§ 5. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ

Рассмотрим способ нахождения частного решения Y неоднородного линейного уравнения

$$L[y] = f(x), \tag{4.46}$$

если известно общее решение $\overline{y}$ соответствующего однородного линейного уравнения

$$L[\overline{y}] = 0. \tag{4.47}$$

Для простоты выкладок ограничимся случаем

$$L[y] = y''' + f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y, \tag{4.48}$$

когда фундаментальная система решений

$$y_1 = \overline{y}_1(x), \quad y_2 = \overline{y}_2(x), \quad y_3 = \overline{y}_3(x) \tag{4.49}$$

уравнения (4.47) состоит из трех функций (общий случай вполне аналогичен).

Пусть

$$\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3. \tag{4.50}$$

Если C_1, C_2, C_3 — постоянные, то функция $\overline{y}$ удовлетворяет однородному уравнению (4.47). Будем считать

$$C_1 = C_1(x), \quad C_2 = C_2(x), \quad C_3 = C_3(x)$$

некоторыми функциями от x (т. е. проварьируем эти постоянные) и положим

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + C_3(x_3)y_3, \tag{4.51}$$

причем подберем функции $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ так, чтобы функция y, определяемая формулой (4.51), была бы решением неоднородного линейного уравнения (4.46). Так как в нашем распоряжении имеется три функции $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$, то две из них мы можем считать произвольными или же можно наложить на эти три функции д в а у с л о в и я, причем дифференциальное уравнение (4.46) будет удовлетворено за счет выбора третьей, оставшейся свободной функции. Пользуясь этим обстоятельством, в дальнейшем мы потребуем, чтобы производные y' и y'' имели такой вид, как будто бы функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ и $C_3(x)$ являются постоянными.

Дифференцируя формулу (4.51), будем иметь

$$\begin{aligned} y' &= C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + C_3(x)y_3' + \\ &+ [C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_3'(x)y_3]. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Наложим на функции $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ условие

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_3'(x)y_3 = 0. \tag{4.53}$$

Тогда получим

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + C_3(x)y_3'. \tag{4.54}$$

Дифференцируя еще раз, находим

$$\begin{aligned} y'' &= C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + C_3(x)y_3'' + \\ &+ [C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_3'(x)y_3']. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_3'(x)y_3' = 0; \tag{4.55}$$

тогда

$$y'' = C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + C_3(x)y_3''. \tag{4.56}$$

Дальнейшее дифференцирование дает

$$\begin{aligned} y''' &= C_1(x)y_1''' + C_2(x)y_2''' + C_3(x)y_3''' + \\ &+ [C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + C_3'(x)y_3'']. \end{aligned} \tag{4.57}$$

Подставляя функцию y (4.51) и ее последовательные производные y' (4.54), y'' (4.56) и y''' (4.57) *в неоднородное линейное уравнение*

$$L[y] \equiv y''' + f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = f(x), \tag{4.58}$$

получим

$$\begin{aligned} &C_1(x)L[y_1] + C_2(x)L[y_2] + C_3(x)L[y_3] + \\ &+ [C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + C_3'(x)y_3''] = f(x) \end{aligned}$$

или, так как

$$L[y_1] = 0, \quad L[y_2] = 0, \quad L[y_3] = 0,$$

то

$$C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + C_3'(x)y_3'' = f(x). \qquad (4.59)$$

Таким образом, для определения неизвестных функций $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ в силу уравнений (4.53), (4.55), (4.59) имеем систему

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_3'(x)y_3 &= 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_3'(x)y_3' &= 0, \\ C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + C_3'(x)y_3'' &= f(x). \end{aligned}\right\} \qquad (4.60)$$

Вид этой системы полезно запомнить. Система (4.60) представляет собой алгебраическую линейную неоднородную систему трех уравнений с тремя неизвестными $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $C_3'(x)$. Определитель этой системы

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} \qquad (4.61)$$

есть вронскиан для системы решений y_1, y_2, y_3; поэтому $W(x) \neq 0$ и, следовательно, система (4.60) совместна и имеет единственное решение. Решая систему (4.60, будем иметь

$$\begin{cases} C_1'(x) = \dfrac{f(x)}{W(x)} W_{31}(x), \\ C_2'(x) = \dfrac{f(x)}{W(x)} W_{32}(x), \\ C_3'(x) = \dfrac{f(x)}{W(x)} W_{33}(x), \end{cases} \qquad (4.62)$$

где $W_{3k}(x)$ $(k = 1, 2, 3)$ — соответствующие миноры со знаками определителя $W(x)$.

Отсюда

$$\begin{cases} C_1(x) = A_1 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{f(\xi)}{W(\xi)} W_{31}(\xi) d\xi, \\ C_2(x) = A_2 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{f(\xi)}{W(\xi)} W_{32}(\xi) d\xi, \\ C_3(x) = A_3 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{f(\xi)}{W(\xi)} W_{33}(\xi) d\xi, \end{cases} \qquad (4.63)$$

где x_0 — некоторое фиксированное значение и A_1, A_2, A_3 — произвольные постоянные. Так как мы ищем частное решение, то можно положить

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0. \qquad (4.64)$$

Если в выражениях (4.63) сохранить постоянные A_1, A_2, A_3, то формула (4.51) даст общее решение неоднородного уравнения. Подставляя функции $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ в формулу (4.51) с учетом условия (4.64), получим частное решение

$$Y = \int_{x_0}^{x} \frac{f(\xi)}{W(\xi)} \begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) & y_3(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) & y_3'(\xi) \\ y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \end{vmatrix} d\xi. \qquad (4.65)$$

Заметим, что решение Y (4.65), как легко проверить непосредственно, удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$Y(x_0) = 0, \quad Y'(x_0) = 0, \quad Y''(x_0) = 0.$$

Пример. Решить уравнение

$$y''' + y' = \frac{1}{\sin x}.$$

Решение. Однородное уравнение имеет вид

$$y''' + y' = 0.$$

Полагая $y' = u$ и $y''' = u''$, получим

$$u'' + u = 0.$$

Отсюда (см. гл. III, § 5)

$$u = \frac{dy}{dx} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

и, следовательно,

$$y = C_1 \sin x - C_2 \cos x + C_3.$$

Таким образом,

$$y_1 = \sin x, \quad y_2 = -\cos x, \quad y_3 = 1.$$

Положим $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$, $C_3 = C_3(x)$. Для определения производных $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $C_3'(x)$ согласно формулам (4.60) имеем следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &C_1'(x)\sin x - C_2'(x)\cos x + C_3'(x) = 0, \\ &C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ &-C_1'(x)\sin(x) + C_2'(x)\cos x = \frac{1}{\sin x}. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$C_1'(x) = -1, \quad C_2'(x) = \operatorname{ctg} x, \quad C_3'(x) = \frac{1}{\sin x}$$

и поэтому

$$C_1(x) = -x + A_1,$$

$$C_2(x) = \ln|\sin x| + A_2,$$

$$C_3(x) = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + A_3,$$

где A_1, A_2, A_3 — произвольные постоянные.

Следовательно

$$y = -x\sin x - \cos x \cdot \ln|\sin x| + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + A_1 \sin x - A_2 \cos x + A_3.$$

Задания для самостоятельного решения

1. $y'' - y = xe^x$.

2. $xy''' + y'' = x^2$. Найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = 0.$$

§ 6. ОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L[y] = 0, \qquad (4.66)$$

где

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y, \qquad (4.67)$$

причем коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — постоянные действительные числа.

Чтобы построить общее решение уравнения (4.66) согласно общей теории, достаточно найти систему n линейно независимых частных решений этого уравнения (*фундаментальную систему*). Будем искать эти решения в форме показательной функции

$$y = e^{kx}, \qquad (4.68)$$

где k — некоторое постоянное число.

Очевидно,

$$y^{(m)} = (e^{kx})^{(m)} = k^m e^{kx} \quad (m = 0, 1, \ldots, n).$$

Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение (4.66), будем иметь

$$L[e^{kx}] \equiv e^{kx} F(k) = 0, \tag{4.69}$$

где

$$F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n. \tag{4.70}$$

Так как $e^{kx} \neq 0$, то из уравнения (4.69) получим

$$F(k) = 0. \tag{4.71}$$

Полином $F(k)$ называется *характеристическим многочленом* для дифференциального уравнения (4.66), а уравнение (4.71) — *характеристическим уравнением*. Последнее формально получается в результате замены производных $y^{(m)}$ $(m = 0, 1, \ldots, n)$ в дифференциальном уравнении (4, 66) на соответствующие степени величины k. Характеристическое уравнение (4. 71) есть алгебраическое уравнение n-й степени и, как известно из алгебры, имеет n действительных или комплексных корней

$$k_1, k_2, \ldots, k_n.$$

Если k есть корень характеристического уравнения, то, как следует из формулы (4.69), функция e^{kx} является решением дифференциального уравнения (4.66).

Рассмотрим различные случаи, которые здесь могут представиться.

Случай 1. Корни характеристического уравнения действительны и различны.

Имеем n частных решений

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}, \quad \ldots, \quad y_n = e^{k_n x} \tag{4.72}$$

Легко убедиться, что эти решения линейно независимы. В самом деле, пусть для определенности

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_n.$$

Предположим, что существуют постоянные

$$C_1, C_2, \ldots, C_n$$

такие, что

$$C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x} \equiv 0, \tag{4.73}$$

причем C_m — последняя в этом наборе константа, отличная от нуля.

Разделив обе части тождества (4.73) на $e^{k_m x}$, тогда будем иметь

$$C_1 e^{-(k_m-k_1)x} + C_2 e^{-(k_m-k_2)x} + \dots + C_m \equiv 0.$$

Отсюда, переходя к пределу при $x \to +\infty$, получим

$$C_m = 0,$$

что противоречит предположению.

Итак, тождество вида (4.73) невозможно, т. е. функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ — линейно независимы.

Поэтому решения (4.72) образуют фундаментальную систему решений. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения (4.66) есть

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x},$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ — произвольные постоянные.

Пример. Пусть

$$y''' - y' = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение есть

$$k^3 - k = 0;$$

отсюда корни

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = -1.$$

Этим корням соответствуют частные решения

$$y_1 = 1, \quad y_2 = e^x, \quad y = e^{-x}.$$

Так как корни характеристического уравнения действительны и различны, то общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Случай 2. Корни характеристического уравнения различны, но среди них есть комплексные.

В этом случае удобно рассматривать комплексные решения

$$y = u + iv, \tag{4.74}$$

где u и v — действительны и $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. При дифференцировании функции y число i рассматривается как постоянная.

Лемма 1. Если комплексная функция y (4.74) удовлетворяет линейному однородному уравнению (4.66) с действительными коэффициентами, то u — действительная часть и v — коэффициент мнимой части этой функции также удовлетворяют данному уравнению.

В самом деле, в силу линейности оператора $L[y]$, имеем

$$L[u+iv] = L[u] + iL[v] \equiv 0.$$

Но комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда равны нулю его действительная и мнимая части:

$$L[u]=0 \quad \text{и} \quad L[v]=0,$$

т. е. u и v — являются решениями уравнения (4.66).

Переходим теперь к построению фундаментальной системы решений.

Заметим, что так как коэффициенты характеристического уравнения (4.72) действительные, то комплексные корни его попарно сопряженные. Пусть, например,

$$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta$$

(α, β — действительные) — комплексные корни характеристического уравнения. Из свойств показательной функции следует, что функции

$$e^{k_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

и

$$e^{k_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

по-прежнему являются решениями (комплексными) дифференциального уравнения (4.66).

В силу леммы 1 действительная часть и коэффициент мнимой части приведенных выше решений, а именно:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

также являются решениями уравнения (4.66).

В случае, если некоторый корень k_s — действителен, то мы, как и прежде, берем частное решение в форме показательной функции $y = e^{k_s x}$. Можно доказать, что построенная таким образом система частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ будет фундаментальной. Общее решение дифференциального уравнения (4.66), как всегда, выразится формулой

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

Пример. Пусть

$$y''' - 2y' - 4y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^3 - 2k - 4 = 0. \qquad (4.75)$$

Отсюда подбором получаем один очевидный корень

$$k_1 = 2.$$

Деля левую часть уравнения (4.75) на бином $k - 2$, будем иметь

$$(k-2)(k^2 + 2k + 2) = 0.$$

Следовательно, два другие корня характеристического уравнения будут

$$k_2 = -1 + i, \quad k_3 = -1 - i.$$

Фундаментальная система решений здесь такова:

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{-x}\cos x \quad y_3 = e^{-x}\sin x.$$

Поэтому общее решение есть

$$y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos x + C_3 \sin x),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Случай 3. Среди корней характеристического уравнения имеются действительные кратные корни.

Установим предварительно одно свойство оператора $L[y]$.

Лемма 2. Если

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y,$$

то при постоянной k имеем

$$L[e^{kx}y] = e^{kx}\left\{F(k)y + F'(k)y' + \frac{F''(k)}{2!}y'' + \ldots + \frac{F^{(n)}(k)}{n!}y^{(n)}\right\}, \qquad (4.76)$$

где $F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n$ — характеристический многочлен оператора $L[y]$.

Доказательство. В силу формулы Лейбница имеем

$$e^{kx}y = e^{kx}y;$$

$$(e^{kx}y)' = e^{kx}(ky + y');$$

. . . .

$$(e^{kx}y)^{(n)} = e^{kx}\left(k^n y + C_n^1 k^{n-1} y' + C_n^2 k^{n-2} y'' + \ldots + y^{(n)}\right).$$

Умножая эти равенства соответственно на $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, 1$ и складывая, получим

$$L[e^{kx}y] = e^{kx}\{[k^n + a_1k^{n-1} + \ldots + a_n]y +$$
$$+ [nk^{n-1} + (n-1)a_1k^{n-2} + \ldots + a_{n-1}]\,y' +$$
$$+ \frac{1}{2!}[n(n-1)\,k^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1k^{n-3} + \ldots + 2\cdot 1a_{n-2}]\,y'' +$$
$$+ \ldots + \frac{1}{n!}[n(n-1)\ldots 1]y^{(n)}\} =$$
$$= e^{kx}\left\{F(k)y + F'(k)y' + \frac{F''(k)}{2!}y'' + \ldots + \frac{F^{(n)}(k)}{n!}y^{(n)}\right\},$$

что и требовалось доказать.

Пусть

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_s$$

$(s \geq 2)$ — корень характеристического уравнения (4.71), кратность которого равна s. Положим

$$y = e^{k_1x}u, \tag{4.77}$$

где $u = u(x)$ — новая неизвестная функция.

Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение (4.66), будем иметь

$$L[e^{k_1x}u] = 0$$

или, применяя лемму 2 и учитывая, что $e^{k_1x} \neq 0$, получим

$$F(k_1)u + F'(k_1)u' + \frac{F''(k_1)}{2!}u'' + \ldots + \frac{F^{(n)}(k_1)}{n!}u^{(n)} = 0. \tag{4.78}$$

Так как k_1 — корень характеристического уравнения (4.71) кратности s, то

$$F(k_1) = F'(k_1) = \ldots = F^{(s-1)}(k_1) = 0,$$
$$F^{(s)}(k_1) \neq 0.$$

Поэтому уравнение (4.78) принимает вид

$$\frac{F^{(s)}(k_1)}{s!}u^{(s)} + \ldots + \frac{F^{(n)}(k_1)}{n!}u^{(n)} = 0. \tag{4.79}$$

Ввиду того, что наинизший порядок производной в уравнении (4.79) равен s, это уравнение имеет s очевидных частных решений

$$u_1 = 1, \quad u_2 = x, \quad \ldots, \quad u_s = x^{s-1}.$$

Следовательно, исходное дифференциальное уравнение допускает систему s частных решений вида

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = xe^{k_1 x}, \ \ldots, \ y_s = x^{s-1}e^{k_1 x}. \tag{4.80}$$

Эти решения и составляют соответствующую часть фундаментальной системы решений.

Пример. Решить уравнение

$$y^{IV} + 2y''' - 2y' - y = 0. \tag{4.81}$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$k^4 + 2k^3 - 2k - 1 = 0$$

или, так как

$$k^4 + 2k^3 - 2k - 1 = (k^4 - 1) + 2k\,(k^2 - 1) =$$

$$=(k^2 - 1)(k^2 + 1 + 2k) = (k^2 - 1)(k + 1)^2 =$$

$$= (k - 1)(k + 1)^3,$$

то

$$(k - 1)(k + 1)^3 = 0.$$

Отсюда

$$k_1 = 1, \quad k_2 = k_3 = k_4 = -1.$$

Поэтому фундаментальная система решений имеет вид

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-x}, \quad y_3 = xe^{-x}, \quad y_4 = x^2e^{-x}.$$

Следовательно, общее решение данного уравнения (4.81) будет

$$y = C_1e^x + (C_2 + C_3x + C_4x^2)\,e^{-x},$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

Случай 4. Среди корней характеристического уравнения имеются кратные комплексные.

Так как коэффициенты характеристического уравнения (4.71) действительны, то комплексные корни его попарно сопряженные, причем кратности сопряженных корней одинаковы. Пусть

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_s = \alpha + i\beta$$

(α, β — действительны) — корень характеристического уравнения (4.72) кратности s. В таком случае

$$k_{s+1} = k_{s+2} = \ldots = k_{2s} = \alpha - i\beta$$

также s-кратный корень этого уравнения. На основании формулы (4.80) корню k_1 соответствует s частных комплексных решений

$$e^{k_1 x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x);$$

$$xe^{k_1 x} = xe^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{s-1}e^{k_1 x} = x^{s-1}e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x).$$

Поэтому в силу леммы 1 дифференциальное уравнение (4.66) имеет $2s$ действительных решений вида

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_{s+1} = e^{\alpha x}\sin\beta x;$$

$$y_2 = xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_{s+2} = xe^{\alpha x}\sin\beta x;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_s = x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_{2s} = x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

которые и войдут в общую фундаментальную систему решений как соответствующие кратным корням $\alpha \pm i\beta$.

Пример. Решить уравнение

$$y^{\mathrm{IV}} + 2y'' + y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^4 + 2k^2 + 1 = 0$$

или

$$(k^2 + 1)^2 = 0.$$

Отсюда

$$k_1 = k_2 = i, \quad k_3 = k_4 = -i.$$

Фундаментальная система решений будет иметь вид:

$$y_1 = \cos x, \quad y_2 = x\cos x, \quad y_3 = \sin x, \quad y_4 = x\sin x.$$

Следовательно, общее решение этого уравнения таково:

$$y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_2 + C_4 x)\sin x$$

(C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные).

Задания для самостоятельного решения

1. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0.$
2. $y''' + y = 0.$
3. $y''' - 3y' + 2y = 0.$
4. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$
5. Найти решение уравнения

$$y^{IV} + y = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0.$$

§ 7. НЕОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение

$$L[y] = f(x), \tag{4.82}$$

где

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y, \tag{4.83}$$

a_k $(k = 1, \ldots, n)$ — постоянные, а $f(x)$ — некоторая данная непрерывная функция. Как известно (см. § 4), общее решение уравнения (4.82) выражается формулой

$$y = \bar{y} + Y,$$

где $\bar{y}$ — общее решение соответствующего однородного линейного уравнения и Y — частное решение данного неоднородного линейного уравнения (4.82). В предыдущем параграфе указывалось как найти функцию $\bar{y}$. Для нахождения частного решения Y можно воспользоваться методом вариации произвольных постоянных (см. § 4), однако этот метод приводит к длинным выкладкам. Поэтому мы укажем для некоторых простых правых частей $f(x)$ другой метод нахождения функции Y, носящий название *метода неопределенных коэффициентов*. Рассмотрим ряд случаев.

Случай 1. (Правая часть уравнения — полином.) Пусть

$$f(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m, \tag{4.84}$$

где $b_0, b_1, \ldots, b_m$ — некоторые постоянные.

1. Предположим, что

$$a_n = F(0) \neq 0,$$

т. е. $k = 0$ — не является корнем характеристического уравнения

$$F(k) \equiv k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Ищем частное решение в форме полинома той же (как и у правой части) степени

$$Y = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m, \tag{4.85}$$

с неопределенными коэффициентами $A_0, A_1, \ldots, A_m$. Последовательно дифференцируя, будем иметь

$$Y' = mA_0 x^{m-1} + (m-1)A_1 x^{m-2} + \ldots + 1 \cdot A_{m-1};$$
$$Y'' = m(m-1)A_0 x^{m-2} + (m-1)(m-2)A_1 x^{m-3} + \ldots + 2 \cdot 1 \cdot A_{m-2};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Подставляя эти выражения в уравнение (4.82) и делая приведение подобных членов, получим

$$L[Y] = A_0 a_n x^m + (m a_{n-1} A_0 + a_n A_1) x^{m-1} +$$
$$+ [m(m-1)a_{n-2}A_0 + (m-1)a_{n-1}A_1 + a_n A_2] x^{m-2} + \ldots$$
$$\ldots \equiv b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &A_0 a_n = b_0, \\ &A_1 a_n + m a_{n-1} A_0 = b_1, \\ &A_2 a_n + (m-1)a_{n-1}A_1 + m(m-1)a_{n-2}A_2 = b_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{4.86}$$

из которой, учитывая, что $a_n \neq 0$, последовательно можно определить коэффициенты $A_0, A_1, A_3, \ldots, A_m$.

Итак, если $F(0) \neq 0$, то уравнение (4.82) имеет частное решение в форме полинома, степень которого равна степени полинома, стоящего в правой части уравнения.

2. Пусть

$$a_{n-r} = \frac{F^{(r)}(0)}{r!} = 0 \quad (r = 0, 1, \ldots, s-1)$$

и

$$a_{n-s} = \frac{F^{(n)}(0)}{s!} \neq 0,$$

т. е. $k = 0$ — является корнем характеристического уравнения кратности s.

Уравнение (4.82) имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-s} y^{(s)} = f(x). \tag{4.87}$$

Полагая

$$y^{(s)} = u, \tag{4.88}$$

получим

$$u^{(n-s)} + a_1 u^{(n-s-1)} + \dots + a_{n-s} u = f(x). \tag{4.89}$$

Так как $a_{n-s} \neq 0$, то в силу предыдущих рассуждений последнее уравнение имеет частное решение U в форме полинома

$$U = \overline{A}_0 x^m + \overline{A}_1 x^{m-1} + \dots + \overline{A}_m,$$

где $\overline{A}_0, \overline{A}_1, \dots, \overline{A}_m$ — некоторые определенные числа.

На основании формулы (4.88), интегрируя почленно последнее равенство s раз, получим частное решение исходного уравнения (4.87)

$$Y = C_0 + C_1 x + \dots + C_{s-1} x^{s-1} +$$

$$+ A_0 x^{m+s} + A_1 x^{m+s-1} + \dots + A_m x^s,$$

где $C_0, C_1, \dots, C_{s-1}$ — произвольные постоянные и $A_0, A_1, \dots, A_m$ — некоторые определенные коэффициенты. Так как мы ищем лишь частное решение, то можно положить

$$C_0 = C_1 = \dots = C_{s-1} = 0$$

и, следовательно,

$$Y = x^s (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m). \tag{4.90}$$

Итак, если $F(0) = 0$ и кратность нулевого корня равна s, то дифференциальное уравнение имеет частное решение в форме полинома, степень которого на s единиц выше, чем степень полинома, стоящего в правой части уравнения.

Пример. Решить уравнение

$$y^{(10)} + y^{(9)} = x. \tag{4.91}$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^{10} + k^9 = 0.$$

Отсюда

$$k_1 = k_2 = \dots = k_9 = 0, \quad k_{10} = -1.$$

Согласно теории ищем частное решение Y в такой форме:

$$Y = x^9 (Ax + B)$$

или

$$Y = Ax^{10} + Bx^9.$$

Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение (4.91), получим

$$10!A + 10!Ax + 9!B \equiv x.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} 10!A &= 1 \\ 10!A + 9!B &= 0 \end{aligned}\right\}$$

и, следовательно,

$$A = \frac{1}{10!}, \quad B = -\frac{1}{9!}.$$

Таким образом, находим

$$Y = \frac{x^{10}}{10!} - \frac{x^9}{9!}.$$

Общее решение данного уравнения, очевидно, таково:

$$y = \sum_{m=1}^{9} C_m x^{m-1} + C_{10} e^{-x} - \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!}.$$

Случай 2. (Правая часть уравнения — полином, умноженный на показательную функцию.)

Пусть

$$f(x) = P_m(x)\, e^{\alpha x}, \tag{4.92}$$

где

$$P_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$$

и α — постоянное число.

Положим

$$y = e^{\alpha x} u,$$

где u — новая неизвестная функция. Тогда уравнение (4.82) примет вид

$$e^{\alpha x} L_1[u] = e^{\alpha x} P_m(x)$$

или

$$L_1[u] = P_m(x), \tag{4.93}$$

где

$$L_1[u] = F(\alpha)u + F'(\alpha)u' + \frac{F''(\alpha)}{2!}u'' + \ldots + \frac{F^{(n)}(\alpha)}{n!}u^{(n)}.$$

Мы пришли к разобранному выше случаю с той только разницей, что коэффициент при неизвестной функции u равен $F(\alpha)$.

1. Пусть $F(\alpha) \neq 0$, т. е. α не является корнем характеристического уравнения. Тогда уравнение (4.93) имеет частное решение U в форме полинома степени m. Следовательно, данное уравнение (4.82) имеет частное решение вида

$$Y = e^{\alpha x} Q_m(x), \tag{4.94}$$

где $Q_m(x)$ — полином степени m.

Коэффициенты полинома $Q_m(x)$ находятся путем подстановки выражения (4.94) в данное дифференциальное уравнение.

2. Пусть $F(\alpha) = 0$, причем $k = \alpha$ — корень характеристического уравнения кратности s.

Уравнение (4.93) допускает частное решение U в форме полинома степени m, умноженное на x^s. Следовательно, наше дифференциальное уравнение (4.82) имеет такое частное решение

$$Y = x^s e^{\alpha x} Q_m(x), \tag{4.95}$$

где $Q_m(x)$ — полином степени m.

Пример. Решить уравнение

$$y'' - y = x^2 e^x. \tag{4.96}$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 - 1 = 0.$$

Корни его $k_1 = -1$, $k_2 = 1$.

Так как $\alpha = 1 = k_2$, то полагаем

$$Y = x(Ax^2 + Bx + C)e^x$$

или

$$Y = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^x.$$

Применяя формулу Лейбница, получаем

$$Y'' = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^x +$$
$$+ 2(3Ax^2 + 2Bx + C)e^x + (6Ax + 2B)e^x.$$

Отсюда, подставляя Y и Y'' в уравнение (4.96), будем иметь

$$2(3Ax^2 + 2Bx + C)e^x + (6Ax + 2B)e^x \equiv x^2 e^x$$

или

$$6Ax^2 + (6A + 4B)x + (2B + 2C) \equiv x^2.$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} 6A &= 1, \\ 6A + 4B &= 0, \\ 2B + 2C &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, находим

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = -\frac{1}{4}, \quad C = \frac{1}{4},$$

поэтому

$$Y = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\right)e^x.$$

Общее решение уравнения (4.96) имеет вид

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\right)e^x.$$

В дальнейшем иногда будет удобно пользоваться комплексными решениями.

Лемма. Пусть дано линейное неоднородное уравнение

$$L[y] = f(x), \tag{4.97}$$

правая часть которого есть комплексная функция

$$f(x) = \varphi(x) + i\psi(x) \tag{4.98}$$

и $L[y]$ есть линейный оператор (4.83) с действительными коэффициентами.

Если комплексная функция

$$y = u + iv$$

удовлетворяет уравнению (4.97), то действительные функции u и v удовлетворяют соответственно уравнениям

$$L[u] = \varphi(x) \quad \text{и} \quad L[v] = \psi(x).$$

В самом деле, имеем

$$L[u+iv] = L[u] + iL[v] \equiv \varphi(x) + i\psi(x).$$

Так как коэффициенты оператора $L[y]$ действительные, то отсюда следует, что

$$L[u] = \varphi(x) \quad \text{и} \quad L[v] = \psi(x).$$

Лемма доказана.

Случай 3. Правая часть уравнения — произведение показательной функции на тригонометрический полином с полиномиальными коэффициентами.

Пусть

$$f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x], \tag{4.99}$$

где α и β — действительные числа, $P_m(x)$ и $Q_m(x)$ — полиномы, которые, без нарушения общности рассуждения, можно считать имеющими одинаковую степень m.

Применяя формулу Эйлера

$$\cos\beta x=\frac{1}{2}(e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}),\quad \sin\beta x=\frac{1}{2i}(e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}),$$

получим

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{(\alpha+i\beta)x}P_m^*(x)+\frac{1}{2}e^{(\alpha-i\beta)x}Q_m^*(x),$$

где $P_m^*(x)$, $Q_m^*(x)$ — некоторые комплексно сопряженные полиномы степени m. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$L[\hat{y}]=e^{(\alpha+i\beta)x}P_m^*(x). \tag{4.100}$$

Очевидно, что

$$f(x)=\operatorname{Re}[e^{(\alpha+i\beta)x}P_m^*(x)].$$

Согласно случаю 2 имеем две возможности.

1. Пусть $F(\alpha+i\beta)\neq 0$, т. е. число $k=\alpha+i\beta$ — не является корнем характеристического уравнения.

Уравнение (4.100) имеет частное решение вида*

$$\hat{Y}=e^{(\alpha+i\beta)x}[R_m(x)-iS_m(x)], \tag{4.101}$$

где $R_m(x)$ и $S_m(x)$ — некоторые полиномы степени m. На основании леммы заключаем, что исходное дифференциальное уравнение (4.82) имеет частное решение вида

$$Y=e^{\alpha x}[R_m(x)\cos\beta x+S_m(x)\sin\beta x]. \tag{4.102}$$

2. Пусть $F(\alpha+i\beta)=0$, причем кратность корня $k=\alpha+i\beta$ равна s. Вспомогательное уравнение (4.100) имеет частное решение вида

$$\hat{Y}=x^s e^{(\alpha+i\beta)x}[R_m(x)-iS_m(x)].$$

---

* Знак минус (−) взят для удобства выкладок.

Следовательно, наше дифференциальное уравнение имеет частное решение вида

$$Y = x^s e^{\alpha x}[R_m(x)\cos\beta x + S_m(x)\sin\beta x]. \qquad (4.103)$$

На практике можно не переходить к комплексным функциям, а сразу пользоваться готовыми видами частных решений (4.102) и (4.103).

Пример. Решить уравнение

$$y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x. \qquad (4.104)$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k + 5 = 0,$$

откуда

$$k_1 = 1 + 2i, \quad k_2 = 1 - 2i.$$

Так как число $\alpha + i\beta = 1 + 2i$ является простым корнем характеристического уравнения, то полагаем

$$y = xe^x(A\cos 2x + B\sin 2x). \qquad (4.105)$$

Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение (справа налево), будем иметь

$$\begin{gathered}5xe^x(A\cos 2x + B\sin 2x) - \\ - 2[(x+1)e^x(A\cos 2x + B\sin 2x) + \\ + 2xe^x(-A\sin 2x + B\cos 2x)] + \\ + [(x+2)e^x(A\cos 2x + B\sin 2x) + \\ + 4(x+1)e^x(-A\sin 2x + B\cos 2x) - \\ - 4xe^x(A\cos 2x + B\sin 2x)] \equiv e^x \sin 2x\end{gathered}$$

или, производя очевидные сокращения, получим

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x \equiv \sin 2x.$$

В силу линейной независимости функций $\sin 2x$ и $\cos 2x$ имеем

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = 0,$$

следовательно, частное решение будет иметь вид

$$Y = -\frac{x}{4}e^x \cos 2x.$$

Отсюда общее решение уравнения (4 ,104) таково:

$$y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) - \frac{x}{4}e^x\cos 2x.$$

З а м е ч а н и е. Случаи 1, 2, 3 можно объединить общим правилом: для правых частей указанного вида частное решение дифференциального уравнения, вообще говоря, имеет тот же вид, что и его правая часть; при исключительных обстоятельствах нужно добавлять дополнительный степенной множитель x^s.

Принцип наложения решений. Если правая часть линейного неоднородного уравнения (с постоянными или переменными коэффициентами) представляет собой сумму нескольких функций, то частное решение этого уравнения можно находить как сумму частных решений соответствующих неоднородных уравнений, правыми частями которых служат отдельные слагаемые суммы.

Т е о р е м а. Пусть

$$L[y] = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \tag{4.105}$$

и y_1, y_2 — решения уравнений

$$L[y_1] = \varphi_1(x) \quad \text{и} \quad L[y_2] = \varphi_2(x).$$

В таком случае

$$y = y_1 + y_2$$

является решением исходного уравнения (4.105).

В самом деле, в силу линейности оператора имеем

$$L[y] = L[y_1] + L[y_2] \equiv \varphi_1(x) + \varphi_2(x),$$

что и требовалось доказать.

Пример. Решить уравнение

$$y''' + y'' + y' + y = x^2 + \sin^2 x. \tag{4.106}$$

Р е ш е н и е. Составляем характеристическое уравнение

$$k^3 + k^2 + k + 1 = 0$$

или

$$(k^2 + 1)(k + 1) = 0.$$

Отсюда

$$k_1 = -1, \quad k_2 = i, \quad k_3 = -i.$$

Правую часть уравнения (4.106) можно представить в таком виде:

$$f(x) = \left(x^2 + \tfrac{1}{2}\right) + \left(-\tfrac{1}{2}\cos 2x\right).$$

Согласно принципу наложения решений рассматриваем уравнения

$$y_1''' + y_1'' + y_1' + y_1 = x^2 + \frac{1}{2} \qquad (4.107)$$

и

$$y_2''' + y_2'' + y_2' + y_2 = -\frac{1}{2}\cos 2x. \qquad (4.108)$$

Соответствующие частные решения имеют вид

$$Y_1 = Ax^2 + Bx + C$$

и

$$Y_2 = D\cos 2x + E\sin 2x.$$

Подставляя эти выражения соответственно в уравнения (4.107) и (4.108), находим

$$A = 1; \quad B = -2; \quad C = \frac{1}{2}$$

и

$$D = \frac{1}{14}; \quad E = \frac{1}{7}.$$

Отсюда частное решение уравнения (4.106) будет таково:

$$Y = Y_1 + Y_2 = x^2 - 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{14}(\cos 2x + 2\sin 2x)$$

и, следовательно, его общее решение имеет вид

$$y = C_1e^{-x} + C_2\cos x + C_3\sin x +$$
$$+ x^2 - 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{14}(\cos 2x + 2\sin 2x),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Задания для самостоятельного решения

1. Указать форму частных решений Y, если

а) $y''' + y' = 1 + \cos x$;

б) $y^{IV} - y = x^2e^x + e^{2x}$;

в) $y^{IV} + 2y'' + y = x\sin x$;

г) $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}\cos x$.

2. Решить уравнение

$$y''' - y'' = x + \cos x.$$

3. Найти частное решение уравнения

$$y''' + 2y'' + 2y' + y = x,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

§ 8. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА

К линейному уравнению с постоянными коэффициентами легко приводится уравнение Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \tag{4.109}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — постоянные числа.

Для простоты ограничимся рассмотрением уравнения второго порядка

$$x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = f(x). \tag{4.110}$$

Считая, что $x > 0$, положим

$$x = e^t. \tag{4.111}$$

Используя правило дифференцирования функции, заданной параметрически, последовательно находим

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = e^{-t} \frac{dy}{dt},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} : \frac{dx}{dt} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение (4.110), после очевидных сокращений получим линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = f(e^t). \tag{4.112}$$

Если $x < 0$, то, полагая $x = -\xi$, мы приходим к уравнению Эйлера относительно переменной ξ, где $\xi > 0$.

Замечание. Рассмотрим однородное уравнение Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0. \tag{4.113}$$

Так как при замене $x = e^t$ это уравнение приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами, то оно допускает частные решения вида

$$y = e^{kt} = x^k,$$

где k — постоянно. Задаваясь этой формой, легко непосредственно найти эти решения.

В исключительном случае, когда корни соответствующего характеристического уравнения кратные, частные решения y имеют более сложный вид

$$y = t^r e^{kt} = x^k \ln^r x \quad (r = 0, 1, \ldots, m),$$

где m — кратность корня.

Пример. Решить уравнение

$$x^2 y'' + xy' + y = x. \qquad (4.114)$$

Решение. Полагая

$$x = e^t,$$

будем иметь

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = e^t$$

или

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = e^t. \qquad (4.115)$$

Характеристическое уравнение здесь имеет вид

$$k^2 + 1 = 0.$$

Отсюда

$$k_1 = i, \quad k_2 = -i.$$

Будем искать частное решение уравнения (4.115) в виде

$$Y = Ae^t.$$

Подставляя Y в (4.115), находим

$$2Ae^t \equiv e^t,$$

следовательно,

$$A = \frac{1}{2}$$

и

$$Y = \frac{1}{2}e^t.$$

Так как корни характеристического уравнения мнимые, то общее решение уравнения (4.115) таково:

$$y = \frac{1}{2}e^t + C_1 \sin t + C_2 \cos t$$

и, следовательно, общее решения уравнения (4.114) есть

$$y = \frac{1}{2}x + C_1 \sin(\ln x) + C_2 \cos(\ln x)$$

(C_1, C_2 — произвольные постоянные).

Задания для самостоятельного решения

1. $x^2 y'' + xy' - p^2 y = 0$ (p — постоянно).
2. $x^2 y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x}$.
3. $x^3 y''' = 6(x + y)$. Найти частное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$, $y''(1) = 6$.

§ 9. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Если в задаче дифференциального характера имеется несколько искомых функций, то для определения этих функций, вообще говоря, следует составить столько дифференциальных уравнений, сколько имеется функций. Так мы приходим к *системе дифференциальных уравнений*.

Пусть, например, t — независимая переменная и $x = x(t)$, $y = y(t)$ — искомые функции. Допустим, что эти функции удовлетворяют системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y), \end{aligned}\right\} \tag{4.116}$$

разрешенной относительно производных $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, где f и g — заданные непрерывные функции.

Система такого вида называется *нормальной*, а число уравнений в нормальной системе называется ее *порядком*: таким образом, нормальная система (4.116) — второго порядка. Под решением системы (4.116) мы понимает любую совокупность двух функций

$$x = x(t), \quad y = y(t), \tag{4.117}$$

которые будучи подставлены в эту систему обращают ее в тождество.

Геометрически в пространстве $Otxy$ решение (4.117) представляет собой некоторую линию, которая называется *интегральной кривой*. Система дифференциальных уравнений, как правило, имеет бесчисленное множество решений, образующих *поле интегральных кривых*. Чтобы из этого поля выделить одну конкретную интегральную кривую, в простейшем случае достаточно указать точку $M_0(t_0, x_0, y_0)$ (рис. 37) искомой кривой, т. е. нужно задать *начальное условие*

$$x|_{t=t_0} = x_0, \quad y|_{t=t_0} = y_0.$$

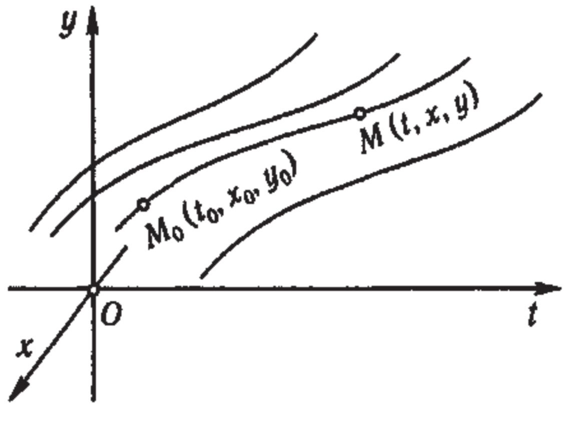

Рис. 37

В приложениях к механике и физике независимую переменную t часто рассматривают как время. В таком случае переменные x и y можно интерпретировать как координаты некоторой точки $M(x, y)$ плоскости Oxy. Эту плоскость обычно называют *фазовой плоскостью* (в случае большого числа переменных *фазовым пространством*). Решение (4.117) носит название *движения*, а соответствующая кривая (4.117) фазовой плоскости, где t играет роль параметра, называется *траекторией движения*. Если предположить, что фазовая плоскость заполнена непрерывно движущейся средой (поток жидкости), для любой точки которой проекции скорости движения в каждый момент времени t определяются уравнениями (4.116), то траекторию движения можно наглядно представлять как траекторию движения точки этой среды.

Если правые части системы (4.116) явным образом зависят от времени t (*нестационарный поток*), то траектория, начинающаяся в данный момент t_0 в точке $M_0(x_0, y_0)$, будет, вообще говоря, зависеть от этого момента. В случае же, если правые части системы (4.116) явным образом не зависят от времени t (*стационарный поток*), то распределение скоростей движения точек пространства для любого момента времени t одинаково и поэтому точки среды, занимающие в какие-либо моменты времени t_0 и t'_0 положение M_0, будут иметь одну и ту же геометрическую траекторию движения (конечно, кинематические законы движения их будут различны).

Пример. Уравнение упругих колебаний материальной точки в одном измерении при отсутствии сопротивления среды имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta^2 x = 0,$$

где $\beta > 0$ — постоянная величина.

Решение. Полагая $y = \frac{dx}{dt}$, получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\beta^2 x.$$

Движения этой системы имеют вид

$$x = A\sin(\beta t + \varphi), \quad y = A\beta\cos(\beta t + \varphi),$$

где A и φ — произвольные постоянные.

Исключая отсюда время t, получим уравнение семейства фазовых траекторий

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{(\beta A)^2} = 1. \tag{4.118}$$

Очевидно, что здесь траектории движения — подобные эллипсы (рис. 38).

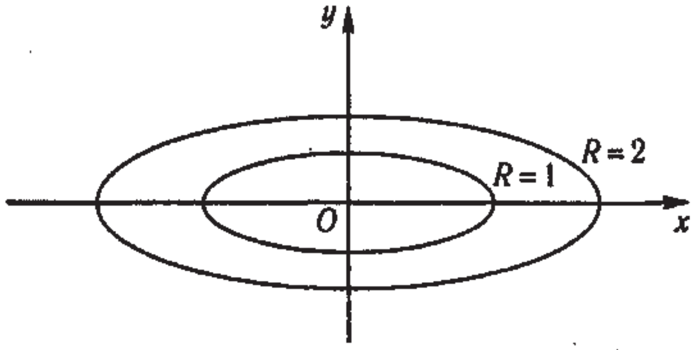

Рис. 38

Зная кривые на фазовой плоскости, можно составить примерное представление о механическом движении. В нашем случае точка фазовой плоскости $M(x, y)$ есть совокупность положения x и скорости y материальной точки. Из уравнения (4.118) вытекает, что при любых начальных условиях координата x и скорость y материальной точки остаются ограниченными, причем, чем больше отклонение x, тем меньше скорость y, и наоборот. Кроме того, траектория замкнута и, следовательно, механическая система через определенные промежутки времени возвращается к прежнему состоянию, т. е. движение ее носит периодический характер.

З а м е ч а н и е. Систему, содержащую производные высших порядков от искомых функций и разрешенную относительно старших производных, путем введения новых неизвестных функций можно привести к нормальному виду. В частности, уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной, можно записать в виде нормальной системы n уравнений первого порядка.

Пример. Пусть

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= x^2 + y^2 + \frac{dx}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= ty + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2. \end{aligned}\right\}$$

Р е ш е н и е. Полагая

$$\frac{dx}{dt} = x_1,$$

получим нормальную систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x_1, \\ \frac{dx_1}{dt} &= x^2 + y^2 + x_1, \\ \frac{dy}{dt} &= ty + {x_1}^2. \end{aligned}\right\}$$

Редукция нормальной системы к одному уравнению высшего порядка. Одним из основных методов решения системы дифференциальных уравнений является *метод исключения*, состоящий в том, что при помощи дифференцирования системы получают ряд новых дифференциальных уравнений, из которых, в совокупности с данными уравнениями, исключают все искомые функции, кроме одной. Таким образом, приходят к одному уравнению, содержащему одну неизвестную функцию.

Мы изложим этот метод применительно к нормальной системе второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(t, x, y). \tag{4.119}$$

Рассматривая x и y как функции от t и дифференцируя по t, например, первое уравнение системы (4.119), получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial f}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial y} \equiv f_1(t, x, y). \tag{4.120}$$

Определяя из первого уравнения системы (4.119) функцию y (предполагая, что это возможно), будем иметь

$$y = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right). \tag{4.121}$$

Подставляя это выражение в уравнение (4.120), получим одно уравнение 2-го порядка относительно искомой функции $x(t)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f_2\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right). \tag{4.122}$$

Если удастся найти общее решение этого уравнения

$$x = \varphi\,(t, C_1, C_2),$$

то функцию y можно непосредственно определить по формуле (4.121)

Очевидно, аналогичным способом можно получить также дифференциальное уравнение относительно y.

Замечание. На практике часто бывает возможно произвести исключение всех искомых функций, кроме одной, не пользуясь общей схемой.

Пример. Решить систему

$$\frac{dx}{dt} = t + x - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 1 + x + 4y. \tag{4.123}$$

Р е ш е н и е. Дифференцируя первое уравнение, будем иметь

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 1 + \frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt}$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} = t - 1 - x - 10y.$$

Так как

$$y = \frac{1}{2}\left(t + x - \frac{dx}{dt}\right), \tag{4.124}$$

то

$$\frac{d^2x}{dt^2} = t - 1 - x - 5\left(t + x - \frac{dx}{dt}\right)$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 6x = -1 - 4t. \tag{4.125}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 - 5k + 6 = 0,$$

откуда находим его корни

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 3.$$

Ищем частное решение

$$X = A + Bt.$$

Получаем

$$0 - 5B + 6(A + Bt) \equiv -1 - 4t.$$

Следовательно,

$$A = -\frac{13}{18}, \quad B = -\frac{2}{3}$$

и

$$X = \frac{13}{18} - \frac{2}{3}t.$$

Поэтому

$$x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} - \frac{1}{18}(13 + 12t). \tag{4.126}$$

Из формулы (4.124) находим

$$y = -\frac{1}{2}C_1e^{2t} - C_2e^{3t} - \frac{1}{36}(1 - 6t). \tag{4.127}$$

Совокупность формул (4.126), (4.127), где C_1, C_2 — произвольные постоянные, дает решение системы (4.123).

Понятие о первых интегралах. Нетождественное соотношение

$$F(t, x, y) = C \tag{4.126}$$

(C — произвольная постоянная) называется *первым интегралом* системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(t, x, y), \tag{4.119}$$

если оно обращается в тождество при подстановке вместо x и y какого-нибудь решения этой системы. Зная первый интеграл, можно одну из искомых функций выразить через другую и, следовательно, порядок системы понизить на единицу.

В случае системы второго порядка (4.119), имея два независимые между собой первые интегралы

$$F_1(t, x, y) = C_1, \quad F_2(t, x, y) = C_2 \tag{4.127}$$

и разрешая полученную систему (4.127) относительно x и y, будем иметь общее решение системы (4.119)

$$x = \varphi_1(t, C_1, C_2), \quad y = \varphi_2(t, C_1, C_2). \tag{4.128}$$

Пример. Решить систему

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x. \tag{4.129}$$

Решение. Складывая уравнения почленно, будем иметь

$$\frac{d}{dt}(x + y) = x + y.$$

Отсюда получаем первый интеграл

$$x + y = C_1 e^t. \tag{4.130}$$

Умножая первое уравнение системы (4.129) на x, а второе на y и вычитая, будем иметь

$$x\frac{dx}{dt} - y\frac{dy}{dt} = 0 \text{ или } \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2 - y^2) = 0.$$

Отсюда получаем еще один первый интеграл

$$x^2 - y^2 = C_2. \tag{4.131}$$

Система уравнений (4.130) и (4.131) дает общее решение системы (4.129) в неявном виде. Разрешая эту систему относительно x и y, находим

$$x = Ae^t + Be^{-t}, \quad y = Ae^t - Be^{-t}$$

(A, B — произвольные постоянные).

Задания для самостоятельного решения

1. $\frac{dx}{dt} = x + y, \quad \frac{dy}{dt} = x - y.$

Найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1, y(0) = 0$.

2. $\frac{d^2x}{dt^2} = y, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = x.$

§ 10. ОБ ОБЩИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ

Для уравнений *n-го порядка*

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{4.132}$$

где $n \geq 2$, постановка *общей краевой задачи* заключается в следующем: найти решение $y = y(x)$ уравнения (4.132), для которого в фиксированном наборе из $m \geq 2$ точек $x = x_i$ $(i = 1, ..., m)$ значения его самого $y_i = y(x_i)$ и его производных $y_i^{(s)} = y^{(s)}(x_i)$ $(s \geq 1)$ удовлетворяют n независимым между собой *граничным условиям* вида

$$G_\nu\left(y_1, y_1', ..., y_1^{(\sigma_{1\nu})}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(\sigma_{m\nu})}\right) = 0 \tag{4.133}$$
$$(\nu = 1, ..., n),$$

где G_ν — заданные (вообще говоря, *нелинейные*) функции своих аргументов, а $\sigma_{1\nu}, ..., \sigma_{m\nu}$ — заданные порядки производных функции $y(x)$*

Общая краевая задача может быть однозначно разрешимой, вовсе не обладать решением или же иметь несколько (и даже бесконечно много) решений. Конкретный поиск решения подобной задачи следует производить, по возможности, путем, аналогичным указанному при изложении краевых задач для уравнений второго порядка.

Пример 1. Найти решение $y = y(x)$ уравнения

$$y^{IV} + y'' = 0, \tag{4.134}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$y(0) = y'(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \tag{4.135}$$

---

* Так как для решения $y = y(x)$ уравнения (4.132) его производные порядка n и выше выражаются (путем последовательного дифференцирования исходного уравнения при естественном допущении о нужной *гладкости* такого решения) через искомую функцию y и ее младшие производные $y', ..., y^{(n-1)}$, то можно считать, что здесь справедливы неравенства $\sigma_{i\nu} \leq n - 1$ $(i = 1, ..., m; \nu = 1, ..., n)$.

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение (4.134) имеет вид $k^4+k^2=0$, а его корнями служат числа $k_{1,2}=0$, $k_{3,4}=\pm i$. Поэтому общее решение уравнения (4.134) можно записать формулой

$$y=C_1+C_2x+C_3\sin x+C_4\cos x, \tag{4.136}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. Отсюда получаем

$$y(0)=C_1+C_4, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=C_1+C_2\frac{\pi}{2}+C_3. \tag{4.137}$$

Дифференцируя равенство (4.136), находим $y'=C_2+C_3\cos x-C_4\sin x$, и потому

$$y'(0)=C_2+C_3, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=C_2-C_4. \tag{4.138}$$

Тем самым, из граничных условий (4.135) приходим к системе уравнений относительно C_1, C_2, C_3, C_4:

$$\left.\begin{aligned} &C_1+C_4=1,\\ &C_2+C_3=1,\\ &C_1+\frac{\pi}{2}C_2+C_3=\frac{\pi}{2},\\ &C_2-C_4=0. \end{aligned}\right\} \tag{4.139}$$

Выражая из первого, второго и четвертого уравнений системы (4.139) переменные C_1, C_2, C_3 через C_4, получаем

$$C_1=1-C_4, \quad C_2=C_4, \quad C_3=1-C_4. \tag{4.140}$$

Подставляя эти представления для C_1, C_2, C_3 в третье уравнение системы (4.139), приходим к равенству

$$(1-C_4)+\frac{\pi}{2}C_4+(1-C_4)=\frac{\pi}{2},$$

которое можно переписать в виде

$$\left(\frac{\pi}{2}-2\right)C_4=\frac{\pi}{2}-2.$$

Отсюда заключаем, что

$$C_4=1,$$

а тем самым, согласно (4.140), и что

$$C_1=0, \quad C_2=1, \quad C_3=0.$$

Следовательно, единственным решением искомой краевой задачи служит функция $y=x+\cos x$.

Для систем уравнений общие краевые задачи также можно рассматривать. Но при этом нужно иметь в виду, что *разрешимость* такой задачи естественно ожидать лишь в случае, когда удается представить *общее решение* исходной системы дифференциальных уравнений *в виде функций от некоторого числа произвольных постоянных*, а граничные условия позволяют эти константы реально определить. Приведем по этому поводу иллюстрирующие примеры.

Пример 2. В предыдущем § 9 для системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= t + x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} &= 1 + x + 4y \end{aligned}\right\} \tag{4.141}$$

было найдено ее общее решение в виде соотношений

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} - \tfrac{1}{18}(13 + 12t), \\ y &= -\tfrac{1}{2} C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t} - \tfrac{1}{36}(1 - 6t) \end{aligned}\right\} \tag{4.142}$$

с двумя произвольными постоянными C_1 и C_2. Поэтому разрешимость краевой задачи здесь можно ожидать, в частности, *в двухточечной ситуации*, когда в каждой из точек задается лишь по одному граничному условию для совокупности функций $x = x(t)$, $y = y(t)$: скажем, в первой точке t_1 указывается значение для функции $x(t)$ (или ее производной), во второй точке t_2 — для функции $y(t)$ (или ее производной).

Например, полагая $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ и требуя выполнение граничных условий

$$x(t_1) = 0, \quad y(t_2) = 0, \tag{4.143}$$

приходим к следующей системе уравнений относительно C_1, C_2:

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 &= \tfrac{13}{8}, \\ \tfrac{e^2}{2} C_1 + e^3 C_2 &= \tfrac{5}{36}. \end{aligned}\right\} \tag{4.144}$$

Из первого уравнения системы (4.144) имеем

$$C_2 = \frac{13}{18} - C_1. \tag{4.145}$$

Подставляя это выражение для C_2 во второе уравнение системы (4.144), приходим к равенству

$$\frac{e^2}{2} C_1 + e^3\left(\frac{13}{18} - C_1\right) = \frac{5}{36},$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{e^2}{2}C_1 - e^3C_1 = \frac{5}{36} - \frac{13}{18}e^3.$$

Отсюда заключаем, что

$$C_1 = \frac{\frac{5}{36} - \frac{13}{18}e^3}{\frac{e^2}{2} - e^3} = \frac{1}{18e^2}\frac{26e^3 - 5}{2e - 1}, \tag{4.146}$$

а тем самым, согласно (4.145), и что

$$C_2 = \frac{13}{18} - C_1 = \frac{13}{18} - \frac{1}{18e^2}\frac{26e^3 - 5}{2e - 1} = \frac{1}{18e^2}\frac{5 - 13e^2}{2e - 1}. \tag{4.147}$$

Следовательно, единственным решением краевой задачи (4.141), (4.143) служат функции $x(t)$, $y(t)$, где

$$x(t) = \frac{1}{18e^2}\frac{26e^3 - 5}{2e - 1}e^{2t} - \frac{1}{18e^2}\frac{13e^2 - 5}{2e - 1}e^{3t} - \frac{1}{18}(13 + 12t), \tag{4.148}$$

$$y(t) = \frac{1}{18e^2}\frac{13e^2 - 5}{2e - 1}e^{3t} - \frac{1}{36e^2}\frac{26e^3 - 5}{2e - 1}e^{2t} - \frac{1}{36}(1 - 6t). \tag{4.149}$$

Пример 3. Рассмотрим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= y, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= x. \end{aligned}\right\} \tag{4.150}$$

Для построения ее общего решения можно воспользоваться методом исключения. Именно, дифференцируя дважды первое уравнение в системе (4.150) и заменяя производную $\frac{d^2y}{dt^2}$ ее значением из второго уравнения данной системы, приходим к линейному однородному уравнению четвертого порядка

$$\frac{d^4x}{dt^4} - x = 0. \tag{4.151}$$

Его характеристическое уравнение $k^4 - 1 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm 1$, $k_{3,4} = \pm i$. Поэтому общее решение уравнения (4.151) может быть записано формулой

$$x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\sin t + C_4\cos t. \tag{4.152}$$

А так как в силу первого уравнения системы (4.150) должно выполняться равенство $y = \frac{d^2x}{dt^2}$, то имеем также формулу

$$y = C_1e^t + C_2e^{-t} - C_3\sin t - C_4\cos t. \qquad (4.153)$$

Тем самым, общее решение системы (4.150) описывается соотношениями

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\sin t + C_4\cos t,\\ y &= C_1e^t + C_2e^{-t} - C_3\sin t - C_4\cos t,\end{aligned}\right\} \qquad (4.154)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

Разрешимость краевой задачи здесь возможна не только в двухточечной ситуации, но и в ситуациях с заданием условий в трех или же четырех точках: нужно лишь чтобы такие требования порождали бы разрешимую систему уравнений относительно вышеуказанных констант. Конкретный вид граничных условий, заключающих информацию о функциях $x(t)$, $y(t)$ и их производных в выбранных точках, может быть весьма разнообразным, но при этом естественно ожидать «благополучный исход» в отношении разрешимости получаемой для искомых констант системы уравнений в случаях, когда *число граничных условий совпадает с числом разыскиваемых констант*, т. е. равно четырем.

В простейшей двухточечной ситуации, скажем, с точками $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$ и граничными условиями

$$x(t_1) = 1, \quad y(t_1) = -1, \quad x(t_2) = -1, \quad y(t_2) = 1 \qquad (4.155)$$

соответствующая система уравнений для констант C_1, C_2, C_3, C_4 принимает вид

$$\left.\begin{aligned} &C_1 + C_2 + C_4 = 1,\\ &C_1 + C_2 - C_4 = -1,\\ &e^{\frac{\pi}{2}}C_1 + e^{-\frac{\pi}{2}}C_2 + C_3 = -1,\\ &e^{\frac{\pi}{2}}C_1 + e^{-\frac{\pi}{2}}C_2 - C_3 = 1.\end{aligned}\right\} \qquad (4.156)$$

Вычитая в системе (4.156) из первого уравнения второе уравнение, из третьего уравнения четвертое уравнение, находим, что

$$C_4 = 1, \quad C_3 = -1. \qquad (4.157)$$

Подставляя найденные C_3, C_4 в первое и третье уравнения системы (4.156), для констант C_1, C_2 получаем линейную однородную систему двух алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} &C_1 + C_2 = 0, \\ &e^{\frac{\pi}{2}} C_1 + e^{-\frac{\pi}{2}} C_2 = 0, \end{aligned}\right\}$$

с отличным от нуля определителем, единственным решением которой будут служить числа

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0. \tag{4.158}$$

Следовательно, краевая задача (4.150), (4.155), где $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$, однозначно разрешима и ее решение определяется функциями $x(t) = \cos t - \sin t$, $y(t) = \sin t - \cos t$.

Задания для самостоятельного решения

Решить следующие краевые задачи:

1. $y''' - 5y'' + 6y' = 0$; $\quad y(-1) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(1) = 0.$

2. $\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} &= x + 2y \end{aligned}\right\}; \quad x(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

ЧАСТЬ II ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Под *дифференциальным уравнением с частными производными* (сокращённо, ДУЧП) понимается равенство, содержащее несколько независимых переменных, неизвестную функцию от независимых переменных и её частные производные по этим переменным. Порядком старшей производной, входящей в состав уравнения, задается *порядок* ДУЧП. Функцией, имеющей соответствующие частные производные и обращающей уравнение в тождество, определяется *решение* ДУЧП. Процесс нахождения решений ДУЧП принято называть его *интегрированием*. Дифференциальное уравнение с частными производными превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение, если независимая переменная одна.

В теории ДУЧП наиболее изучены линейные и квазилинейные уравнения первого и второго порядков. Ими мы далее и ограничимся.

Глава I
УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В этой главе мы рассмотрим линейные однородные и квазилинейные дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка. Особенностью таких уравнений служит тот факт, что нахождение их решений сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений.

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Определения. *Линейное однородное уравнение* в частных производных *первого порядка* определяется соотношением вида

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \qquad (1.1)$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — *независимые* переменные, $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ — неизвестная функция, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ — ее *частные* производные, $A_i = A_i(x_1, \ldots, x_n)$ —

коэффициенты, не зависящие от u. Будем далее полагать, что уравнение (1.1) рассматривается в некоторой области D переменных $x_1, ..., x_n$, а коэффициенты уравнения:

1) *непрерывно дифференцируемы* в области D;

2) одновременно *не обращаются в нуль* ни в одной точке из D, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^2(x_1, ..., x_n) > 0, \quad (x_1, ..., x_n) \in D. \tag{1.2}$$

Решением уравнения (1.1) будем называть любую *непрерывно дифференцируемую* в D функцию $u = u(x_1, ..., x_n)$, обращающую равенство (1.1) в тождество:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad \forall(x_1, ..., x_n) \in D.$$

Геометрически решение рассматриваемого уравнения можно интерпретировать как некоторую гладкую n-мерную поверхность в пространстве $Ox_1, ..., x_n, u$, называемую *интегральной поверхностью* для данного уравнения. Заметим, что линейное однородное уравнение (1.1) всегда имеет решение $u = C$, где C — любое постоянное число: такие решения называются *очевидными* и далее не обсуждаются.

Для соответствующего уравнения с *двумя* независимыми переменными

$$P(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{1.1'}$$

его решение $u = f(x, y)$ в пространстве $Oxyu$ представляет собой просто некоторую гладкую *двумерную* поверхность.

2. Характеристическая система и характеристики. Поставим в соответствие уравнению *с частными производными* (1.1) систему *обыкновенных* дифференциальных уравнений, в *симметрической форме* записываемую в виде

$$\frac{dx_1}{A_1(x_1, ..., x_n)} = ... = \frac{dx_n}{A_n(x_1, ..., x_n)}, \tag{1.3}$$

а при ее эквивалентной записи в *параметрической форме* имеющей вид

$$\frac{dx_i}{dt} = A_i(x_1, ..., x_n), \quad i = 1, 2, ..., n \tag{1.4}$$

(здесь t — новая независимая *параметрическая переменная*). Такую систему ОДУ называют *характеристической* для уравнения

(1.1), а ее решения (интегральные кривые) — *характеристиками* этого уравнения.

В оговоренных для уравнения (1.1) условиях его характеристическая система удовлетворяет теореме существования и единственности решений. Поэтому через каждую точку области D проходит *единственная характеристика* уравнения (1.1), в параметрической форме представимая в виде n функций

$$x_i = x_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.5}$$

В случае уравнения с двумя независимыми переменными (1.1′) его характеристическая система в симметрической форме *вырождается в одно ОДУ 1-го порядка*

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)} \quad \text{или} \quad Q(x, y)dx - P(x, y)dy = 0, \tag{1.3′}$$

а в параметрической форме приобретает вид *автономной системы ОДУ 2-го порядка*

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{1.4′}$$

причем соответствующая ее характеристика может быть записана с помощью *двух* функций

$$x = x(t), \quad y = y(t). \tag{1.5′}$$

3. Первый интеграл. Для системы ОДУ определено понятие первого интеграла. В соответствие с ним под *первым интегралом* характеристической системы уравнения (1.1) будем понимать отличную от константы непрерывно дифференцируемую в D функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$, которая *на любой характеристике* (1.5) *данного уравнения* (т. е. при подстановке в качестве аргументов $x_1, \ldots, x_n$ соответствующих выражений $x_1(t), \ldots, x_n(t)$) имеет *постоянное значение*:

$$g(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = C \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in D, \tag{1.6}$$

где C — константа.

Теорема 1. Если $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ — решение уравнения (1.1), то функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ является первым интегралом для характеристической системы данного уравнения.

Обратно, если функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ служит первым интегралом характеристической системы уравнения (1.1), то $u = g(x_1, \ldots, x_n)$ есть решение этого уравнения.

Доказательство. Пусть $u = f(x_1, ..., x_n)$ — решение уравнения (1.1), и тем самым справедливо тождество

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, ..., x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad \forall (x_1, ..., x_n) \in D. \tag{1.7}$$

Подставим в (1.7) в качестве аргументов $x_1, ..., x_n$ функции $x_1(t), ..., x_n(t)$, определяющие какую-нибудь характеристику (1.5) уравнения (1.1). Тогда, дифференцируя f по t (по *правилу дифференцирования сложной функции*) и учитывая, что всякая характеристика уравнения (1.1) должна удовлетворять характеристической системе данного уравнения, на основании (1.7) получаем:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} = \sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, ..., x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv 0.$$

Отсюда следует, что

$$f(x_1(t), ..., x_n(t)) = C \quad \forall t,$$

где C — константа. А это и означает, что функция $f(x_1, ..., x_n)$ является первым интегралом для характеристической системы уравнения (1.1).

Пусть, обратно, функция $g(x_1, ..., x_n)$ служит первым интегралом характеристической системы уравнения (1.1). Тогда для любого решения (1.5) этой системы имеет место тождество

$$g(x_1(t), ..., x_n(t)) = C \quad \forall t, \tag{1.8}$$

где C — константа. Дифференцируя (1.8) по t, получаем

$$0 \equiv \frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} = \sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, ..., x_n)\frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, ..., x_n)\frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \quad \forall (x_1, ..., x_n) \in D,$$

т. е. что $u = g(x_1, ..., x_n)$ является решением уравнения (1.1). Теорема доказана.

В отношении уравнения с двумя независимыми переменными (1.1′) можно заметить, что его характеристической системе будет соответствовать *лишь один ее* первый интеграл вида $g(x, y)$.

4. Общее решение. Пусть известны $n-1$ первых интеграла для характеристической системы уравнения (1.1):

$$g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_{n-1}(x_1, \ldots, x_n), \tag{1.9}$$

причем в области D они *независимы*, т. е. для их *якобиана* имеет место невырожденность:

$$\frac{\partial(g_1, \ldots, g_{n-1})}{\partial(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-1}})} \neq 0 \quad \forall(x_1, \ldots, x_n) \in D \tag{1.10}$$

по крайней мере при одном выборе $n-1$ переменных $x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-1}}$ из их набора $x_1, \ldots, x_n$. Тогда выражение

$$u = \Phi(g_1, \ldots, g_{n-1}), \tag{1.11}$$

где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция от своих аргументов, будем называть *общим решением* линейного однородного уравнения (1.1).

Проверим, что формулой (1.11) при всяком выборе функции Φ *задается решение* уравнения (1.1).

В самом деле, пусть в выражении (1.11) функция Φ фиксирована. Поскольку аргументами для Φ служат первые интегралы характеристической системы уравнения (1.1), то на любой характеристике этого уравнения функция (1.11) будет постоянной. Тем самым, рассматривая Φ как функцию от переменных $x_1, \ldots, x_n$, заключаем, что она сама является первым интегралом для характеристической системы уравнения (1.1). А тогда из теоремы 1 следует, что выражением (1.11) задается решение для уравнения (1.1).

Отметим теперь, что если условие (1.10) реализуется, например, в виде

$$\frac{\partial(g_1, \ldots, g_{n-1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{n-1})} \neq 0 \quad \forall(x_1, \ldots, x_n) \in D, \tag{1.12}$$

то любое решение

$$u = f(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.13}$$

уравнения (1.1) может быть выражено формулой (1.11) при соответствующем подборе функции Φ.

Действительно, подставляя функции g_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ и f из (1.9), (1.13) в уравнение (1.1), приходим к соотношениям вида

$$\left.\begin{aligned}
&A_1\frac{\partial g_1}{\partial x_1}+\ldots+A_n\frac{\partial g_1}{\partial x_n}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_1\frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_1}+\ldots+A_n\frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_n}=0,\\
&A_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\ldots+A_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0.
\end{aligned}\right\}\tag{1.14}$$

Относительно $A_1, \ldots, A_n$ соотношения (1.14) представляют собой систему *однородных линейных алгебраических уравнений*. В силу условия (1.2) эта система имеет нетривиальное решение, а значит, ее определитель Δ в области D *должен быть равен нулю*. Отсюда имеем тождество

$$\Delta \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial(g_1, \ldots, g_{n-1}, f)}{\partial(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)} = 0 \quad \forall(x_1, \ldots, x_n)\in D.$$

Тем самым, функции

$$g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_{n-1}(x_1, \ldots, x_n), f(x_1, \ldots, x_n)$$

в области D *зависимы*, т. е. существует нетривиальная непрерывно дифференцируемая функция F от n переменных такая, что

$$F(g_1, \ldots, g_{n-1}, f) = 0 \quad \forall(x_1, \ldots, x_n)\in D. \tag{1.15}$$

А на основании (1.12) равенство (1.15) можно *однозначно разрешить* относительно переменной f и придти к выражению

$$f = h(g_1, \ldots, g_{n-1}) \quad \forall(x_1, \ldots, x_n)\in D, \tag{1.16}$$

где h — соответствующая непрерывно дифференцируемая функция. Поэтому решение (1.13) действительно может быть представлено в виде $u=h(g_1, \ldots, g_{n-1})$, как и требуется в формуле (1.11).*

Для уравнения с двумя независимыми переменными (1.1′) в случае, когда $g(x, y)$ является первым интегралом его характеристической системы, общее решение можно записать в явном виде

$$u = \Phi(g(x, y)), \tag{1.11′}$$

где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

---

* Утверждения *о зависимости функций* $g_1, \ldots, g_{n-1}, f$ *с соблюдением равенства* (1.15), а также *о возможности, в условиях* (1.12), *перейти от* (1.15) *к соотношению* (1.16) требуют, вообще говоря, более подробных обоснований, но их изложение будет опираться на сведения, выходящие за рамки стандартного втузовского курса высшей математики.

§ 2. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Одной из важнейших задач, рассматриваемых в теории дифференциальных уравнений, служит *задача Коши*, когда решение уравнения ищется *удовлетворяющим заданным начальным условиям*. Для линейного однородного уравнения с частными производными первого порядка

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \tag{2.1}$$

в котором, без ограничения общности, положим

$$A_1(x_1, ..., x_n) \neq 0 \quad \forall (x_1, ..., x_n) \in D, \tag{2.2}$$

задача Коши ставится так:

среди всех решений уравнения (2.1) выделить такое его решение

$$u = f(x_1, ..., x_n), \tag{2.3}$$

которое удовлетворяет *начальному условию*

$$u\big|_{x_1 = x_1^0} = \varphi(x_2, ..., x_n), \tag{2.4}$$

где x_1^0 — заданное число, а $\varphi(x_2, ..., x_n)$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов.

При данной постановке задачи Коши, естественно, полагается, что в $(n+1)$-мерном пространстве $Ox_1 ... x_n u$ соответствующая n-мерная плоскость $x_1 = x_1^0$ *пересекается* с областью D. Тем самым, в ней речь идет о построении в этом пространстве n-мерной интегральной поверхности, описываемой уравнением (2.3), проходящей через заданную гладкую $(n-1)$-мерную поверхность

$$u = \varphi(x_2, ..., x_n), \quad x_1 = x_1^0. \tag{2.5}$$

Если подобная задача Коши рассматривается для уравнения с двумя независимыми переменными

$$P(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.1$'$}$$

с начальным условием

$$u\big|_{x=x^0} = \varphi(y), \tag{2.4$'$}$$

то в ней требуется найти решение $u = f(x, y)$, для которого изображающая в пространстве $Oxyu$ интегральная поверхность будет проходить (в плоскости $x = x^0$) через заданную *кривую*

$$u = \varphi(y), \quad x = x^0. \tag{2.5'}$$

Пусть теперь

$$g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_{n-1}(x_1, ..., x_n) \tag{2.6}$$

— независимые первые интегралы для характеристической системы уравнения (2.1), причем положим, что для них выполняется условие

$$\frac{\partial(g_1, ..., g_{n-1})}{\partial(x_2, ..., x_n)} \neq 0 \qquad \forall (x_1, ..., x_n) \in D. \tag{2.7}$$

Тогда можно сформулировать *алгоритм* построения решения указанной задачи Коши, состоящий из следующих трех этапов:

1) подставляя $x_1 = x_1^0$ в первые интегралы (2.6), составить систему равенств

$$\left.\begin{aligned} g_1(x_1^0, x_2, ..., x_n) &= C_1, \\ g_2(x_1^0, x_2, ..., x_n) &= C_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ g_{n-1}(x_1^0, x_2, ..., x_n) &= C_{n-1} \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

с произвольными параметрами $C_1, ..., C_{n-1}$;

2) разрешая систему (2.8) относительно $x_2, ..., x_n$ (что возможно в силу условия (2.7)), найти выражения для этих переменных:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= p_2(C_1, ..., C_{n-1}), \\ x_3 &= p_3(C_1, ..., C_{n-1}), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= p_n(C_1, ..., C_{n-1}) \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

с соответствующими гладкими функциями;

3) подставляя выражения (2.9) в функцию $\varphi(x_2, ..., x_n)$, задающую начальное условие (2.4), составить формулу

$$u = \varphi(p_2(C_1, ..., C_{n-1}), ..., p_n(C_1, ..., C_{n-1})) \tag{2.10}$$

и положить в ней

$$\begin{cases} C_1 = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n), \\ C_2 = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{n-1} = g_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n). \end{cases} \quad (2.11)$$

Такой алгоритм, действительно, приведет к решению рассматриваемой задачи Коши, поскольку из соотношений (2.10)–(2.11) для u имеет место: *во-первых*, представление (согласно свойствам суперпозиции гладких функций) вида (1.11), определяющего выражение общего решения уравнения (2.1), а, *во-вторых*, справедливость (в силу (2.8)) требования (2.4), задающего поставленное начальное условие.

В отношении задачи Коши для уравнения (2.1′) с условием (2.4′) можно конкретизировать следующее: поскольку характеристическая система в этом случае характеризуется лишь *одним* первым интегралом вида $g(x, y)$, то система (2.8) сведется к *одному* уравнению

$$g(x^0, y) = C, \quad (2.8')$$

система (2.9) перейдет в *одно* равенство

$$y = p(C), \quad (2.9')$$

а из соотношений (2.10)–(2.11) вытекает *единая* формула для искомого решения задачи Коши

$$u = \varphi(p(g(x, y))). \quad (2.10')$$

§ 3. КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим теперь уравнения с частными производными первого порядка вида

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = B(x_1, \ldots, x_n, u), \quad (3.1)$$

полагая, что в заданной области Ω переменных $x_1, \ldots, x_n$, u коэффициенты уравнения $A_i(x_1, \ldots, x_n, u)$ и его правая часть $B(x_1, \ldots, x_n, u)$ есть непрерывно дифференцируемые функции, причем, например,

$$A_1(x_1, \ldots, x_n, u) \neq 0 \quad \forall (x_1, \ldots, x_n, u) \in \Omega. \quad (3.2)$$

Поясним, как решение такого уравнения, называемого *квазилинейным уравнением* в частных производных первого порядка, может быть сведено к решению *присоединенного уравнения* — специально строящегося для него соответствующего *линейного однородного уравнения*.

Пусть D — область изменения переменных $x_1, ..., x_n$, в которой рассматривается уравнение (3.1). Будем искать решение

$$u = f(x_1, ..., x_n), \quad (x_1, ..., x_n) \in D, \tag{3.3}$$

уравнения (3.1) *в неявном виде*, т. е. полагая, что должно выполняться равенство

$$F(x_1, ..., x_n, u) = 0, \quad (x_1, ..., x_n, u) \in \Omega, \tag{3.4}$$

где F — непрерывно дифференцируемая в области Ω функция, для которой

$$\left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{u=f(x_1, ..., x_n)} \neq 0 \quad \forall (x_1, ..., x_n, u) \in \Omega. \tag{3.5}$$

Теорема 2. Если выраженная из уравнения (3.4) функция (3.3) непрерывно дифференцируема в области D и является решением для квазилинейного уравнения (3.1), то функция

$$v = F(x_1, ..., x_n, u), \quad (x_1, ..., x_n, u) \in \Omega, \tag{3.6}$$

служит решением для присоединенного (к (3.1)) уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, ..., x_n, u)\frac{\partial v}{\partial x_i} + B(x_1, ..., x_n, u)\frac{\partial v}{\partial u} = 0 \tag{3.7}$$

на решении (3.3) исходного уравнения (3.1).

Доказательство. Действительно, пусть выраженная из уравнения (3.4) функция (3.3) в области D является непрерывно дифференцируемой и служит решением для уравнения (3.1). Тогда, в силу (3.5), существуют непрерывные частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\left.\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}}\right|_{u=f(x_1, ..., x_n)} \qquad (i=1, 2, ..., n).$$

Подставляя эти частные производные в уравнение (3.1), умножая затем обе части на $-\frac{\partial F}{\partial u}$ и перенося все члены в левую часть, получаем равенство

$$\left.\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, ..., x_n, u)\frac{\partial F}{\partial x_i} + B(x_1, ..., x_n, u)\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{u=f(x_1, ..., x_n)} = 0. \tag{3.8}$$

А равенство (3.8) и означает, что функция (3.6) служит решением присоединенного уравнения (3.7) на решении (3.3) исходного уравнения (3.1). Теорема доказана.

Данная теорема обладает тем недостатком, что для переменных $x_1, ..., x_n, u$ она требует реализации связи в виде формулы (3.3), где $f(x_1, ..., x_n)$, вообще говоря, неизвестная функция. Поэтому на практике поступают по-иному: считают, что функция $F(x_1, ..., x_n, u)$ должна строиться как решение присоединенного уравнения (3.7), в котором *все переменные полагаются* независимыми. Тогда присоединенное уравнение (3.7) будет уже являться *линейным однородным уравнением*, определенным в области Ω переменных $x_1, ..., x_n, u$. Следовательно, для него можно будет написать соответствующую характеристическую систему, в симметрической форме определяемую видом

$$\frac{dx_1}{A_1(x_1, ..., x_n, u)} = ... = \frac{dx_n}{A_n(x_1, ..., x_n, u)} = \frac{du}{B(x_1, ..., x_n, u)}, \tag{3.9}$$

а в параметрической форме имеющей вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= A_1(x_1, ..., x_n, u), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= A_n(x_1, ..., x_n, u), \\ \frac{du}{dt} &= B(x_1, ..., x_n, u). \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Отсюда, если для такой характеристической системы известны ее n независимых в области Ω первых интегралов

$$g_1(x_1, ..., x_n, u), ..., g_n(x_1, ..., x_n, u), \tag{3.11}$$

то выражением

$$v = \Phi(g_1, ..., g_n), \tag{3.12}$$

где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция от своих аргументов, определяется общее решение присоединенного уравнения (3.7). А тогда формулой

$$\Phi(g_1(x_1, ..., x_n, u), ..., g_n(x_1, ..., x_n, u)) = 0 \tag{3.13}$$

будут задаваться (*неявным образом*) решения искомого квазилинейного уравнения (3.1).

Напомним, что при построении функции Φ для выражения (3.12) мы использовали *дополнительные ограничения*, потребовав, чтобы функция F служила бы решением присоединенного уравнения, в котором все переменные $x_1, ..., x_n, u$ считались бы независимыми. Тем самым, мы не можем, вообще говоря, утверждать, что формулой (3.13) описываются *все решения* уравнения (3.1). Решения для уравнения (3.1), не определяемые формулой (3.13), называют *специальными*, но их мы исключаем из рассмотрения. Поэтому соотношение (3.13) мы будем называть просто *формулой общего решения* для квазилинейного уравнения (3.1).

Заметим, что если u входит *только в один* из первых интегралов (3.11), например в последний из них, то формулу (3.13) можно записать и в виде равенства

$$g_n(x_1, ..., x_n, u) = \Psi(g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_{n-1}(x_1, ..., x_n)), \qquad (3.14)$$

где Ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция от своих аргументов. Разрешив равенство (3.14) относительно u, из него тогда получим *явное представление* для общего решения уравнения (3.1).

В случае соответствующего уравнения с двумя независимыми переменными

$$P(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = R(x, y, u) \qquad (3.1')$$

указанный способ поиска его решения $u = f(x, y)$ сводится к построению решения $v = F(x, y, u)$ присоединенного уравнения вида

$$P(x, y, u)\frac{\partial v}{\partial x} + Q(x, y, u)\frac{\partial v}{\partial y} + R(x, y, u)\frac{\partial v}{\partial u} = 0, \qquad (3.7')$$

чья характеристическая система может быть записана как в симметрической форме

$$\frac{dx}{P(x,y,u)} = \frac{dy}{Q(x,y,u)} = \frac{du}{R(x,y,u)}, \qquad (3.9')$$

так и в параметрической форме

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y, u), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y, u), \\ \frac{du}{dt} &= R(x, y, u). \end{aligned}\right\} \qquad (3.10')$$

Такой характеристической системе будет соответствовать уже только *два* независимых (в рассматриваемой области) первых интеграла

$$g_1(x, y, u), \quad g_2(x, y, u), \qquad (3.11')$$

и потому выражение (3,13) здесь перейдет в формулу общего решения для уравнения (3.1′) вида

$$\Phi(g_1(x, y, u),\ g_2(x, y, u)) = 0 \tag{3.13′}$$

с произвольной непрерывно дифференцируемой функцией Ф. В свою очередь, когда u входит только во второй из первых интегралов (3.11′), то формулу (3.13′) можно переписать в виде

$$g_2(x, y, u) = \Psi(g_1(x, y)), \tag{3.14′}$$

в котором произвольной непрерывно дифференцируемой функцией служит уже Ψ. Наконец, в случае возможного разрешения относительно u равенства (3.14′), от него можно перейти к явному представлению общего решения рассматриваемого уравнения (3.1′).

Пример 1. Для уравнения

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

найти общее решение.

Решение. Будем рассматривать данное уравнение *на всей плоскости* независимых переменных x, y, где только, согласно нашим требованиям к коэффициентам линейного однородного уравнения, исключим точку ($x = 0$, $y = 0$).

Поскольку у уравнения лишь две независимые переменные, то его характеристическая система в симметрической форме определяется одним ОДУ 1-го порядка $xdx + ydy = 0$. Интегрируя его, приходим к равенству $x^2 + y^2 = C$, где C — произвольная константа ($C > 0$). Отсюда заключаем, что первый интеграл для характеристической системы рассматриваемого уравнения задается функцией $g(x, y) = x^2 + y^2$, а его общее решение записывается в явном виде $u = \Phi(x^2 + y^2)$, где Ф — произвольная непрерывно дифференцируемая функция своего одного аргумента.

Геометрически на плоскости Oxy совокупность таких первых интегралов представляет собой *однопараметрическое семейство концентрических окружностей с центрами в начале координат*. При этом в пространстве $Oxyu$ функцией Ф задается интегральная поверхность, являющаяся *поверхностью вращения вокруг оси Ou*.

Пример 2. Для уравнения

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

решить задачу Коши с начальным условием

$$u\big|_{x=1} = \sqrt{1+y^2} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(y).$$

Р е ш е н и е. Прежде всего отметим, что в дальнейших рассуждениях, согласно нашим требованиям к задаче Коши для линейного однородного уравнения, из плоскости независимых переменных Oxy мы исключим уже целую прямую $y = 0$.

Из предыдущего примера следует, что общее решение уравнения имеет вид $u = \Phi\,(x^2 + y^2)$, где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, а выражением $g(x, y) = x^2 + y^2$ определяется первый интеграл соответствующего характеристического уравнения. Подставляя $x = 1$ в первый интеграл, на основании начального условия приходим к равенству $x^2+y^2\big|_{x=1} = C$, где C —параметр. Отсюда $1 + y^2 = C$ и тем самым находим, что $y=\sqrt{C-1}$ $(C>1)$. Поэтому, после подстановки найденного значения y в функцию $\varphi(y)$, получаем $u=\sqrt{1+y^2} = \sqrt{1+(C-1)} = \sqrt{C}$. А тогда, заменяя C выражением для $g(x, y)$, заключаем, что решением рассматриваемой задачи Коши служит функция $u=\sqrt{x^2 + y^2}$.

Геометрически в пространстве $Oxyu$ найденной функцией $u=\sqrt{x^2 + y^2}$ задается интегральная поверхность, являющаяся верхней частью прямого кругового конуса (с вершиной в начале координат и осью вращения Ou), проходящей (в плоскости $x = 1$) через заданную кривую $u=\sqrt{1+ y^2}$ (представляющей собой ветвь равнобочной гиперболы $u^2 - y^2 = 1$).

Пример 3. Для уравнения

$$xy\frac{\partial u}{\partial x} + (x-2u)\frac{\partial u}{\partial y} = yu$$

построить общее решение.

Р е ш е н и е. Согласно нашим требованиям к коэффициентам квазилинейного уравнения, далее будем считать, что $xy \neq 0$, т. е. из плоскости переменных (x, y) исключим как прямую $x = 0$, так и прямую $y = 0$. Кроме того, отметив сразу, что данное уравнение, очевидно, *допускает тривиальное решение* $u = 0$, далее будем также полагать, что $u \neq 0$.

Записывая характеристическую систему для присоединенного (к исходному) уравнения в симметрической форме, имеем равенства $\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{x-2u} = \frac{du}{yu}$. Рассматривая в них равенство между первым и третьим членами, приходим к соотношению $\frac{dx}{xy}=\frac{du}{yu}$, которое можно переписать в виде дифференциального уравнения $\frac{du}{u}=\frac{dx}{x}$. Интегрируя его, получаем $\ln|u|=\ln|x|+\tilde{C}_1$, где $\tilde{C}_1$ — произвольная константа. Представляя константу $\tilde{C}_1$ в *логарифмической форме* $\tilde{C}_1=\ln|C_1|$ $(C_1\neq 0)$, тогда находим $\ln\left|\frac{u}{x}\right|=\ln|C_1|$, а тем самым, после потенцирования приходим к равенству $\frac{u}{x}=C_1$. Поэтому выражением $g_1(x,y,u)=\frac{u}{x}$ определяется первый интеграл для исследуемой системы.

Рассматривая теперь в характеристической системе присоединенного уравнения равенство между первым и вторым членами, получаем соотношение $\frac{dx}{xy}=\frac{dy}{x-2u}$, которое мы перепишем в виде равенства

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-2u}{xy}.$$

Отсюда, используя уже имеющуюся возможность выразить u через x с помощью формулы $u=C_1x$, приходим к дифференциальному уравнению $\frac{dy}{dx}=\frac{1-2C_1}{y}$, которое, после разделения переменных, можно переписать в виде $ydy=(1-2C_1)dx$. Поэтому после интегрирования получаем $\frac{y^2}{2}=(1-2C_1)x+\tilde{C}_2$, где $\tilde{C}_2$ — произвольная постоянная. Тем самым, представляя константу $\tilde{C}_2$ *в более удобной форме*, полагая $C_2=2\tilde{C}_2$, заключаем о справедливости равенства $y^2=2x-4C_1x+C_2$.

Последним равенством еще не определяется первый интеграл для характеристической системы присоединенного (к исходному) уравнения, поскольку оно содержит *две* произвольные постоянные. Но в результате исключения в нем, используя связь $u=C_1x$, константы C_1, из него вытекает равенство *с одной произвольной постоянной* $y^2+4u-2x=C_2$. Поэтому выражением $g_2(x,y,u)=y^2+4u-2x$ уже задается *другой* первый интеграл для этой системы.

Легко проверить, что найденные первые интегралы $g_1(x,y,u)=\frac{u}{x}$, $g_2(x,y,u)=y^2+4u-2x$ являются *независимыми*, причем для них невырожден якобиан вида $\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x,y)}$.

В самом деле, имеем $\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x,y)}=\det\begin{pmatrix}-\frac{u}{x^2} & -2\\ 0 & 2y\end{pmatrix}=-2\frac{yu}{x^2}$. В силу оговоренных в начале условий, этот детерминант *отличен от нуля* и тем самым утверждаемая независимость искомых первых интегралов действительно имеет место.

Резюмируя все сказанное, заключаем, что для общего решения рассматриваемого уравнения справедлива неявная формула $\Phi\left(\frac{u}{x}, y^2 + 4u - 2x\right) = 0$, где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция от двух своих переменных.

Отметим, что при рассмотрении всех трех разобранных примеров мы вынуждены были сначала определять условия на области, делающие дальнейшие наши рассуждения обоснованными, а лишь потом проводить непосредственные исследования уравнений. В последующих упражнениях необходимые условия, при которых предлагается исследовать соответствующие уравнения, будут, по возможности, конкретизироваться в формулировках самих заданий.

Задания для самостоятельного решения

1. Для уравнения

$$2x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{2}\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (x > 0)$$

построить общее решение.

2. Для уравнения

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (y > 0)$$

решить задачу Коши с начальным условием

$$u\big|_{x=0} = 2y^2.$$

3. Для уравнения

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + (x + y)\frac{\partial u}{\partial y} = u \quad (x > 0)$$

построить общее решение.

4. Для уравнения

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (x > 0)$$

построить общее решение.

5. Для уравнения

$$(x + u)\frac{\partial u}{\partial x} + (y + u)\frac{\partial u}{\partial y} = x + y \quad (y \neq x)$$

построить общее решение.

Глава II

РЯДЫ ФУРЬЕ

Прежде чем перейти к изучению дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, приведем необходимые сведения из *теории рядов Фурье.*

§ 1. Ортогональные системы функций и обобщенные ряды Фурье

1. Основные определения.

Определение 1. Две действительные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенные на интервале (a, b), называются на этом интервале *ортогональными*, если

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0. \tag{1.1}$$

Определенная на (a, b) *система* действительных функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется *ортогональной* на рассматриваемом интервале, если функции этой системы на данном интервале *попарно ортогональны между собой*:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0, \quad \text{при } n \neq m. \tag{1.2}$$

Аналогичные определения вводятся и для отрезка $[a, b]$.

Определение 2. Под *нормой* функции $\varphi(x)$ на данном промежутке понимается квадратный корень из соответствующего интеграла от квадрата этой функции и обозначается $\|\varphi(x)\|$:

$$\|\varphi(x)\| = \sqrt{\int_a^b [\varphi(x)]^2 dx}. \tag{1.3}$$

Система функций называется *нормированной*, если норма каждой функции равна единице.

Определение 3. Ортогональная нормированная система называется *ортонормированной*. Для нее выполняются условия

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases} \tag{1.4}$$

Введем символ Кронекера — числовую функцию

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases} \qquad (1.5)$$

Тогда для ортонормированной системы характеризующие ее соотношения можно записать в следующем виде:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \delta_{nm}. \qquad (1.6)$$

Комплексные функции

$$f(x) = \alpha(x) + i\beta(x), \quad g(x) = \alpha_1(x) + i\beta_1(x),$$

($\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$ — действительны, $i^2 = -1$), называются *ортогональными* на промежутке (a, b), если

$$\int_a^b f(x)\bar{g}(x)dx = 0,$$

где

$$\bar{g}(x) = \alpha_1(x) - i\beta_1(x)$$

— сопряженная функция. В этом случае норма функции определяется формулой

$$\|f(x)\| = \left\{\int_a^b |f(x)|^2 dx\right\}^{1/2},$$

где

$$|f(x)| = \sqrt{\alpha^2(x) + \beta^2(x)}$$

— модуль функции $f(x)$.

2. Нормирование ортогональной системы функций.

Лемма. Всякую ортогональную систему можно нормировать умножением ее членов на подходящие множители (нормирующие множители).

Доказательство. Пусть в промежутке $a \leq x \leq b$ задана ортогональная система функций $\{\varphi_n(x)\}$. Введем новые функции

$\psi_n(x)=\frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n(x)\|}$. Полученная таким образом система $\{\psi_n(x)\}$ будет ортонормированной. Действительно,

$$\int_a^b \psi_n(x)\psi_m(x)dx=\frac{1}{\|\varphi_n(x)\|\|\varphi_m(x)\|}\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)=\delta_{nm}.$$

3. Обобщенные ряды Фурье. Пусть некоторая функция $f(x)$, заданная в промежутке $a \le x \le b$, допускает разложение в ряд по ортогональной в этом промежутке системе функций $\{\varphi_n(x)\}$:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\varphi_n(x). \tag{1.7}$$

Найдем численные коэффициенты C_n, предполагая равномерную сходимость ряда. Для этого умножим обе части (1.7) на $\varphi_m(x)$ ($m = 1, 2, \ldots$) и проинтегрируем по промежутку (a, b), считая, что ряд, стоящий справа, можно интегрировать почленно (ввиду его равномерной сходимости):

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx=\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} C_n\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx.$$

В силу ортогональности системы $\{\varphi_n(x)\}$ на (a, b), получаем вместо ряда единственный член, соответствующий $n = m$.

Следовательно, заменяя m на n, будем иметь:

$$C_n=\frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\|\varphi_n(x)\|^2} \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{1.8}$$

Коэффициенты C_n, определяемые по этим формулам, называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$ относительно данной ортогональной системы функций $\{\varphi_n(x)\}$.

Функциональный ряд (1.7) с коэффициентами Фурье (1.8) называется *рядом Фурье* функций $f(x)$ независимо от его сходимости. Следовательно, функции $f(x)$ можно поставить в соответствие ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} C_n\varphi_n(x).$$

При определенных предположениях относительно функции $f(x)$ ряд Фурье этой функции будет сходиться и его сумма будет равна $f(x)$.

§ 2. Тригонометрические ряды Фурье

1. Тригонометрическая система функций и ее ортогональность. Рассмотрим систему тригонометрических функций с общим периодом $T = 2l$:

$$\left\{\cos\frac{n\pi x}{l},\ \sin\frac{n\pi x}{l}\right\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.1}$$

Лемма. Система тригонометрических функций ортогональна на любом промежутке, длина которого равна общему периоду этих функций.

Доказательство. Пусть C — любое действительное число и $(C, C+2l)$ любой промежуток длины $2l$. В дальнейшем для определенности мы будем брать $C = -l$, т. е. роль промежутка $(C, C+2l)$ будет у нас играть промежуток $(-l, l)$. В силу определения ортогональности (1.2) мы должны убедиться, что интеграл по этому промежутку от произведения любых двух различных функций системы (2.1) равен нулю, т. е.

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx = 0, \quad n \neq m,$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = 0, \quad \int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = 0, \quad n \neq m, \tag{2.2}$$

$(n = 1, 2, \ldots,\ m = 0, 1, 2, \ldots)$.

Докажем, например, первое соотношение:

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left[\cos\frac{(n-m)\pi x}{l} + \cos\frac{(n+m)\pi x}{l}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{l}{(n-m)\pi}\sin\frac{(n-m)\pi x}{l} + \frac{l}{(n+m)\pi}\sin\frac{(n+m)\pi x}{l}\right]_{-l}^{l} = 0.$$

Остальные соотношения получаются аналогично.

Замечание. Вычислим квадрат нормы этих функций на промежутке $(-l, l)$:

$$\|1\|^2 = \int_{-l}^{l} 1^2\,dx = 2l;$$

$$\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|^2=\int_{-l}^{l}\cos^2\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1+\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx=l,\quad n=1,2,\ldots;$$
$$\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|^2=\int_{-l}^{l}\sin^2\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx=l,\quad n=1,2,\ldots. \tag{2.3}$$

Можно показать, что интеграл от любой функции $\varphi(x)$ периода T по любому промежутку длины T не зависит от начала этого промежутка, т. е. величина интеграла $\int_C^{C+T}\varphi(x)dx$ не зависит от C. Поэтому полученные выше формулы (2.2) и (2.3) имеют место при интегрировании по любому промежутку $(C,\ C+2l)$ длины, равной периоду функции $T=2l$.

2. Тригонометрический ряд Фурье. Предположим, что некоторая функция $f(x)$, определена в промежутке $(-l,l)$, а затем при остальных значениях x продолжена по закону периодичности с периодом $T=2l$. Пусть $f(x)$ допускает тригонометрическое разложение в ряд Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{2.4}$$

Коэффициенты Фурье a_0, a_n, b_n этого тригонометрического ряда Фурье вычисляются по формулам (1.8) с использованием соотношений (2.3) и имеют следующий вид:

$$\begin{cases}a_n\\ b_n\end{cases}=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\begin{cases}\cos\frac{n\pi x}{l}\\ \sin\frac{n\pi x}{l}\end{cases}dx,\quad n=0,1,2,\ldots. \tag{2.5}$$

Отметим частный случай $T=2\pi$ $(l=\pi)$, когда коэффициенты Фурье считаются по формуле

$$\begin{cases}a_n\\ b_n\end{cases}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\begin{cases}\cos nx\\ \sin nx\end{cases}dx,\quad n=0,1,2,\ldots. \tag{2.6}$$

Мы предполагали, что заданная функция может быть разложена в равномерно сходящийся ряд Фурье (2.4) с коэффициентами (2.5). Какой должна быть функция $f(x)$, заданная в промежутке $(-l,l)$, чтобы ее тригонометрический ряд Фурье сходился и представлял функцию

$f(x)$? На этот вопрос дает ответ теорема сходимости для тригонометрических рядов Фурье, которую мы сейчас сформулируем.

3. Теорема сходимости.

Определение. Функция называется *кусочно-непрерывной* на данном промежутке, если: 1) она ограничена на этом промежутке; 2) имеет на нем конечное число точек разрыва, причем все точки разрыва 1-го рода.

Пусть дана периодическая функция $f(x)$ с периодом $T = 2l$. Промежуток $(-l, l)$ при $l = \frac{T}{2}$ называется основной областью. Для этой функции можно построить тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Теорема. Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна в основной области и имеет кусочно-непрерывную первую производную, то: 1) ее соответствующий тригонометрический ряд Фурье сходится для любого значения аргумента;

2) сумма $S(x)$ тригонометрического ряда Фурье равна функции $f(x)$ в точках ее непрерывности и равна среднему арифметическому пределов функции слева и справа в точках разрыва функции, т. е. $S(x) = f(x)$, где x — точка непрерывности и $S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$, где x — точка разрыва.

Так как в точках непрерывности x функции $f(x)$ выполнены равенства

$$f(x-0) = f(x+0) = f(x),$$

то для суммы $S(x)$ имеем общую формулу

$$S(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)].$$

Это одна из основных теорем теории рядов Фурье. Доказательство этой теоремы мы здесь не приводим.

4. Лемма об интеграле четной и нечетной функций.

Определение. Функция называется *четной*, если она не меняет своего значения при изменении знака аргумента, т. е. $f(-x) = f(x)$. Функция называется *нечетной*, если при изменении знака аргумента она меняет знак на обратный, сохраняя абсолютную величину, т. е.

$$f(-x) = -f(x).$$

При вычислении коэффициентов Фурье может оказаться полезной следующая лемма.

Лемма. Интеграл в симметричных пределах от четной функции равен удвоенному интегралу по половине отрезка интегрирования, а от нечетной функции равен нулю, т. е.

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{l} f(x)dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная;} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ — нечетная.} \end{cases} \tag{2.7}$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx.$$

Положим в первом интеграле $x = -\xi$, $dx = -d\xi$. Получим

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = -\int_{l}^{0} f(-\xi)d\xi + \int_{0}^{l} f(x)dx = \int_{0}^{l} f(-\xi)d\xi + \int_{0}^{l} f(x)dx =$$

$$= \int_{0}^{l} [f(-x) + f(x)]dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{l} f(x)dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная функция;} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ — нечетная функция.} \end{cases}$$

Лемма доказана.

5. Тригонометрические ряды Фурье четных и нечетных функций.

Теорема. Тригонометрический ряд Фурье четной периодической функции содержит только косинусы кратных дуг. Тригонометрический ряд Фурье нечетной функции содержит только синусы кратных дуг.

Доказательство. Допустим, что функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье (2.4) с коэффициентами (2.5).

Если $f(x)$ — четная функция, то применяя лемму (2.7) к интегралам (2.5), определяющим коэффициенты Фурье, мы получаем:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.8}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, ...), \tag{2.9}$$

так как в первом случае под знаком интеграла стоит произведение четной функции на четную, т. е. четная функция, а во втором случае — произведение четной функции на нечетную, т. е. нечетная функция. Следовательно, для четной функции имеет место разложение

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}. \tag{2.10}$$

Если $f(x)$ — нечетная функция, то в силу предыдущей леммы для коэффициентов Фурье аналогично имеем

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = 0, \quad (n = 0, 1, 2, ...); \tag{2.11}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad (n = 1, 2, ...). \tag{2.12}$$

Разложение самой функции будет иметь вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{2.13}$$

Тем самым теорема доказана.

В случае, если функция $f(x)$ периода $T = 2\pi$ $(l = \pi)$, полученные выше формулы принимают вид:

для четной функции —

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{2.14}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad (n = 0, 1, 2, ...); \tag{2.15}$$

для нечетной функции —

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{2.16}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad (n = 1, 2, ...). \tag{2.17}$$

6. Четное и нечетное продолжение функции. Пусть некоторая функция $f(x)$ задана только на участке $0 < x < l$. Для разложение этой функции в ряд Фурье ее надо продолжить на промежуток $-l < x < 0$. Это можно сделать различными способами. Например, эту функцию можно разложить в промежутке $(0, l)$ как в ряд вида (2.10) по косинусам кратных дуг с коэффициентами (2.11), так и ряд вида (2.13) по синусам кратных дуг с коэффициентами (2.12). Оба эти ряда внутри промежутка $(0, l)$ будут иметь суммой функцию $f(x)$ или среднее арифметическое в точках разрыва. Но вне промежутка они будут представлять совершенно различные функции: ряд по косинусам даст функцию, получающуюся из $f(x)$ четным продолжением в соседний промежуток $(-l, 0)$, а затем периодическим продолжением с периодом $T = 2l$ вне промежутка $(-l, l)$. Ряд по синусам даст функцию, получающуюся нечетным продолжением функции $f(x)$ в соседний промежуток $(-l, 0)$ и затем периодическим продолжением с периодом $T = 2l$ вне промежутка $(-l, l)$.

Итак, функцию $f(x)$, заданную на промежутке $(0, l)$, можно разложить бесчисленным множеством способов в зависимости от способа продолжения ее в отрицательную область. В частности, ее можно разложить в ряд косинусов (четное продолжение) или в ряд синусов (нечетное продолжение).

7. Понятие о разложении в ряд Фурье непериодических функций. Функцию, заданную в основной области $(-l, l)$, можно периодически продолжить за основную область с помощью функционального соотношения $f(x + 2l) = f(x)$.

Для непериодической функции $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ можно выделить участок $(-l < x < l)$, а затем взять периодическую функцию $\varphi(x)$ с периодом $T = 2l$, которая в промежутке $(-l, l)$ равна $f(x)$. Периодическую функцию $\varphi(x)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{2.18}$$

Формула (2.18) верна на всей оси $-\infty < x < \infty$. Можно написать подобное разложение для функции $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{2.19}$$

Формула (2.19) будет верна только на конечном промежутке $(-l, l)$, так как на этом промежутке $f(x)$ и $\varphi(x)$ совпадают.

Таким образом, непериодическую функцию можно разложить в ряд Фурье только на конечном промежутке.

8. Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье. Ряд Фурье (2.4) по тригонометрической системе функций с коэффициентами (2.5) может быть представлен в комплексной форме. Для этого воспользуемся соотношениями

$$e^{i\frac{n\pi x}{l}} = \cos\frac{n\pi x}{l} + i\sin\frac{n\pi x}{l};\ e^{-i\frac{n\pi x}{l}} = \cos\frac{n\pi x}{l} - i\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (2.20)$$

и выразим тригонометрические функции по формулам

$$\cos\frac{n\pi x}{l} = \frac{1}{2}\left[e^{i\frac{n\pi x}{l}} + e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right];\ \ \sin\frac{n\pi x}{l} = \frac{1}{2i}\left[e^{i\frac{n\pi x}{l}} - e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right]. \qquad (2.21)$$

Отсюда получим

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}e^{i\frac{n\pi x}{l}} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right).$$

Введем обозначения:

$$C_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$C_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{l} - i\sin\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx,$$

$$C_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{l} + i\sin\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{i\frac{n\pi x}{l}}dx.$$

Здесь мы воспользовались выражением (2.5) для коэффициентов Фурье и соотношениями (2.20). Отсюда окончательно получаем комплексную форму ряда Фурье в следующем виде:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\frac{k\pi x}{l}}, \qquad (2.22)$$

$$C_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{k\pi x}{l}}dx, \qquad (2.23)$$

где значок k принимает не только целые положительные но и отрицательные значения.

9. Интегральная формула Фурье. Пусть функция $f(x)$:

1) кусочно-непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную $f'(x)$ на каждом промежутке $(-l, l) \subset (-\infty, +\infty)$;

2) абсолютно-интегрируема на оси $(-\infty, +\infty)$, т. е. существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx < +\infty. \qquad (2.24)$$

Тогда при $-l < x < l$ эту функцию можно представить в виде ряда Фурье:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{i\frac{k\pi x}{l}}, \qquad (2.25)$$

где комплексные коэффициенты Фурье определяются по формуле (2.23) (см. § 2, п. 8)

$$C_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)e^{-i\frac{k\pi\xi}{l}}d\xi, \qquad (2.26)$$

$(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$. Здесь, по сравнению с формулой (2.23), для удобства дальнейших выкладок переменная интегрирования x обозначена другой буквой ξ, что законно для определенного интеграла.

Подставляя формулу (2.26) в формулу (2.25), будем иметь

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)e^{i\frac{k\pi(x-\xi)}{l}}d\xi, \qquad (-l < x < l). \qquad (2.27)$$

Введем обозначения

$$\frac{k\pi}{l} = \lambda_k, \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$$

и

$$\Delta\lambda_k = \lambda_{k+1} - \lambda_k = \frac{(k+1)\pi}{l} - \frac{k\pi}{l} = \frac{\pi}{l},$$

откуда

$$\frac{1}{l} = \frac{\Delta\lambda_k}{\pi}.$$

Тогда формула (2.27) примет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta\lambda_k \int_{-l}^{l} f(\xi) e^{i\lambda_k (x-\xi)} d\xi \qquad (-l < x < l). \qquad (2.28)$$

Пусть теперь $l \to \infty$ и, следовательно,

$$\Delta\lambda_k = \frac{\pi}{l} \to 0.$$

Формула (2.28) напоминает интегральную сумму. Как известно, если функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

то

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(x_k) \Delta x_k = \int_a^b \varphi(x) dx. \qquad (2.29)$$

Можно доказать, что при предположениях 1) и 2) для нашего ряда (2.28) на промежутке $(-\infty, +\infty)$ при $\Delta\lambda_k \to 0$ будет верна аналогичная формула, где функция φ имеет вид

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi \qquad (2.30)$$

(в силу условия (2.24) интеграл (2.30) абсолютно сходится).

Таким образом, переходя к пределу $l \to \infty$ в формуле (2.28) будем иметь интегральную формулу Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi \qquad (-\infty < x < +\infty) \qquad (2.31)$$

или

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \qquad (2.31^{а})$$

где

$$C(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \qquad (2.31^{б})$$

(*спектральное разложение функции* $f(x)$).

З а м е ч а н и е. Как следует из теоремы сходимости рядов Фурье (§ 2, п. 3), в точках разрыва x функции $f(x)$ левая часть формулы (2.31) равна

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)].$$

10. Интеграл Фурье в действительном виде. Используя формулу Эйлера

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$

формулу (2.31) можно записать в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi + \tag{2.32}$$

$$+\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda(x-\xi)d\xi.$$

Так как мы предполагаем, что функция $f(x)$ действительна, то ее мнимая часть равна нулю. Поэтому из формулы (2.32) получаем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi \qquad (-\infty < x < +\infty). \tag{2.33}$$

11. Интегральная формула Фурье для четных и нечетных функций. Так как

$$\cos\lambda(x-\xi) = \cos\lambda x\cos\lambda\xi + \sin\lambda x\sin\lambda\xi,$$

то формулу (2.33) можно переписать в виде

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda, \tag{2.34}$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\, d\xi \tag{2.35}$$

и

$$b(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\, d\xi. \tag{2.36}$$

Если функция $f(x)$ — *четная*, т. е. $f(-x) = f(x)$, то на основании леммы (§ 2, п. 4), имеем

$$b(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi = 0.$$

Поэтому тогда

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\lambda)\cos\lambda x d\lambda \qquad (-\infty < x < +\infty), \qquad (2.37)$$

т. е. справедливо так называемое *«косинус-разложение функции $f(x)$»*, где

$$a(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi. \qquad (2.38)$$

Если же функция $f(x)$ — нечетная, т. е. $f(-x) = -f(x)$, то аналогично получаем

$$a(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi = 0$$

и

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(\lambda)\sin\lambda x d\lambda \qquad (-\infty < x < +\infty), \qquad (2.39)$$

(*«синус-разложение» функции* $f(x)$), где

$$b(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi \qquad (2.40)$$

Пример 1. Построить интегральное представление функции (рис. 1)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < l; \\ 0, & |x| > l. \end{cases}$$

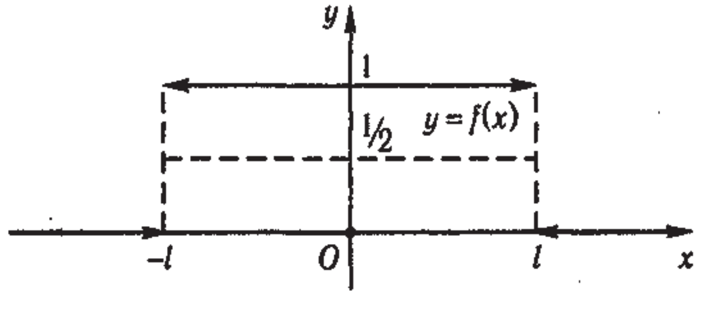

Рис. 1

Решение. Так как функция $f(x)$ — четная, то имеем

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\lambda)\cos\lambda x\, d\lambda,$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\, d\xi = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{0}^{l} 1\cdot\cos\lambda\xi\, d\xi + \int_{l}^{+\infty} 0\cdot\cos\lambda\xi\, d\xi\right\} =$$

$$= \frac{\sin\lambda\xi}{\pi\lambda}\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=l} = \frac{\sin\lambda l}{\pi\lambda}. \qquad (2.41)$$

На основании формулы (2.41) получаем

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\lambda l}{\lambda}\cos\lambda x\, d\lambda \qquad (|\, x\,| \neq l). \qquad (2.42)$$

В силу замечания (9.1) при $x = l$ имеем

$$\frac{f(l-0)+(l+0)}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\lambda l}{\lambda}\cos\lambda l\, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\lambda l}{\lambda}\, d\lambda.$$

Отсюда, полагая $l = \frac{1}{2}$, получаем замечательный *интеграл Дирихле*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\lambda}{\lambda}\, d\lambda = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\lambda}{\lambda}\, d\lambda = \pi. \qquad (2.43)$$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \frac{x}{|x|}$ в интервале $-\pi < x < \pi$. Изобразить график функции и графики нескольких частичных сумм ряда Фурье этой функции. Пользуясь разложением, найти сумму ряда Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots .$$

Решение. Так как функция $f(x)$ — нечетная, то ее тригонометрический ряд Фурье (2.16) содержит только синусы кратных дуг:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где коэффициенты b_n вычисляются по формулам (2.17) и равны

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\right].$$

Следовательно, в точках непрерывности

$$f(x) = 1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \quad (x \neq 0).$$

Полагая $x = \frac{\pi}{2}$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Частичные суммы данного тригонометрического ряда равны:

$$S_1 = \frac{4}{\pi}\sin x,$$

$$S_2 = S_1 + \frac{4}{3\pi}\sin 3x \text{ и т. д.}$$

На рис. 2 изображены графики частичных сумм S_1 и S_2.

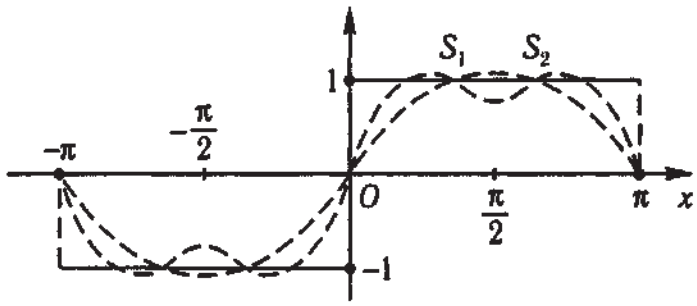

Рис. 2

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

Решение. Так как данная функция — четная, то имеет место разложение (2.14)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где коэффициенты a_n вычисляются по формулам (2.15) и равны

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Следовательно,

$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

Пример 4. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = |\cos x|.$$

Решение. Данная функция — четная и имеет период π $(2l = \pi)$. Следовательно, для нее имеет место разложение (2.10)

$$|\cos x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx,$$

где коэффициенты a_n вычисляются по формулам (2.8) и равны

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x \cos 2nx\,dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}.$$

Следовательно,

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Разложить в ряд Фурье в указанных интервалах следующие функции:

а) $f(x) = |x|$ в интервале $(-\pi, \pi)$;

б) $f(x) = x$ в интервале $(-\pi, \pi)$;

в) $f(x) = \pi^2 - x^2$ в интервале $(-\pi, \pi)$;

г) $f(x)=\begin{cases} A, & \text{если} \quad -\pi < x < 0, \\ B, & \text{если} \quad 0 < x < \pi, \\ \frac{A+B}{2}, & \text{если} \quad x = -\pi, 0, \pi \end{cases}$

на сегменте $[-\pi, \pi]$, где A и B постоянные;

д) $f(x) = x\cos x$ в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Показать справедливость следующих равенств:

а) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos(2n+1)}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2};$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2-3x^2}{12}, \quad -\pi \le x \le \pi;$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^3} = \frac{\pi^2 x - x^3}{12}, \quad -\pi \le x \le \pi.$

3. Функцию $f(x) = \sin^4 x$ разложить в ряд Фурье.

4. Разложить в ряды Фурье следующие периодические функции:

а) $f(x) = \operatorname{sign}(\cos x)$;

б) $f(x) = \arcsin(\sin x)$;

в) $f(x) = |\sin x|$.

5. Указанные ниже функции разложить в интервале $(0, \pi)$ в неполные ряды Фурье: а) по синусам кратных дуг, б) по косинусам кратных дуг. Нарисовать графики функций и графики частичных сумм соответствующих рядов в области их существования.

а) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{если} \quad \frac{\pi}{2} \le x < \pi; \end{cases}$

б) $f(x) = x$.

6. Показать справедливость следующих равенств:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \quad 0 < x < \pi;$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi;$

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2 - 2\pi x}{8}, \quad 0 \le x \le \pi;$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12}, \quad 0 \le x \le 2\pi;$

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} = \frac{x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x}{12}, \quad 0 \le x \le 2\pi.$

7. Разложить в ряды Фурье в интервале $(0, \pi)$ по синусам кратных дуг функции:

а) $f(x) = x(\pi - x)$; б) $f(x) = \sin\frac{x}{2}$.

8. Разложить в ряды Фурье в интервале $(0, \pi)$ по косинусам кратных дуг функции:

а) $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2h}, & \text{если} \quad 0 < x \le 2h, \\ 0, & \text{если} \quad 2h < x < \pi; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 < x \le h, \\ 0, & \text{если} \quad h < x \le \pi. \end{cases}$

9. Разложить в указанных интервалах в неполные ряды Фурье: А) по синусам кратных дуг и Б) по косинусам кратных дуг следующие функции:

а) $f(x) = 1$ в интервале $0 < x < 1$;

б) $f(x) = x$ в интервале $0 < x < l$.

10. В указанных интервалах разложить в ряды Фурье функции:

а) $f(x) = |x|$ в интервале $-1 < x < 1$;

б) $f(x) = 10 - x$ в интервале $5 < x < 15$.

11. Представить интегралом Фурье следующие функции:

а) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & \text{если} \quad |x| < 1, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > 1; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |x| < 1, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > 1; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{если} \quad |x| \le 1, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > 1; \end{cases}$

г) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Указание. Воспользоваться интегралом Лапласа

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|};$$

д) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Указание. Воспользоваться интегралом

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha \, e^{-|\alpha|};$$

е) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если} \quad |x| \le \pi, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > \pi; \end{cases}$

ж) $f(x) = e^{-|x|}$, $(\alpha > 0)$;

Указание. Воспользоваться интегралом

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2} \quad (a>0);$$

з) $f(x) = e^{-x^2}$;

Указание. Воспользоваться интегралом

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}} \quad (a>0);$$

и) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad -1 < x < 0, \\ 1/2, & \text{если} \quad x = -1,\ 0,\ +1, \\ x, & \text{если} \quad 0 < x < 1, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > 1. \end{cases}$

12. Функцию $f(x) = e^{-x}$, $(0 < x < +\infty)$ представить интегралом Фурье, продолжая её: а) четным образом; б) нечетным образом.

Указание. Воспользоваться интегралами

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2}; \quad \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

(здесь $a > 0$).

Глава III
КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В этой главе дается классификация линейных относительно старших производных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.

§ 1. Основные определения

Многие задачи физики и техники приводят к дифференциальным уравнениям в частных производных.

Определение 1. *Уравнением в частных производных* называется соотношение, которое связывает неизвестную функцию нескольких переменных $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и ее частные производные:

$$\Phi\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} ... \partial x_n^{m_n}}, ...\right) = 0, \qquad (1.1)$$

где Φ — заданная функция своих аргументов.

Определение 2. *Решением* уравнения в частных производных (1.1) называется всякая функция, которая после подстановки вместо неизвестной функции обращает это уравнение в тождество по независимым переменным.

Определение 3. Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется *порядком* этого уравнения.

В математической физики наиболее часто встречаются дифференциальные уравнения второго порядка. Основными из них являются: *уравнение колебаний струны*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad (1.2)$$

уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad (1.3)$$

уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \qquad (1.4)$$

§ 2. Приведение к каноническому виду линейных относительно старших производных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными

1. Замена переменных в уравнении. Рассмотрим *линейное относительно старших производных* уравнение второго порядка, определяемое видом

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad (2.1)$$

где x, y — ***независимые*** переменные, $u = u(x, y)$ — ***неизвестная*** функция, $A = A(x, y)$, $B = B(x, y)$, $C = C(x, y)$ — ***коэффициенты*** уравнения, не зависящие от u, $F = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ — его ***правая часть***, причем будем считать, что уравнение (2.1) рассматривается в *некоторой области* D переменных (x, y). Положим, что коэффициенты данного уравнения непрерывно дифференцируемы в D, а его правая часть является непрерывно дифференцируемой функцией в заданной области Ω изменения своих аргументов. Наконец, потребуем, чтобы в области D искомые коэффициенты *одновременно не обращались бы в нуль*.

Назовем выражение

$$\Delta = B^2 - AC$$

дискриминантом уравнения (2.1) и будем говорить, что уравнение (2.1) в области D принадлежит:

а) гиперболическому типу, если $\Delta > 0$;

б) параболическому типу, если $\Delta = 0$;

в) эллиптическому типу, если $\Delta < 0$.

Введем вместо (x, y) новые независимые переменные (ξ, η) (рис. 3):

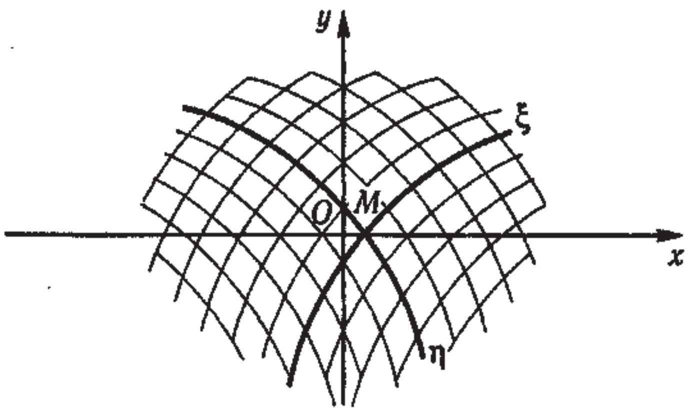

Рис. 3

Пусть преобразование переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \tag{2.2}$$

является невырожденным, т. е. якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

в области D.

Производные в новых независимых переменных (ξ, η) вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\dfrac{\partial \eta}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial \xi}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Подставляя значения производных из (2.3) в уравнение (2.1), получим:

$$A_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C_1\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \tag{2.4}$$

где

$$\begin{cases} A_1 = A\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + C\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2, \\ B_1 = A\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + B\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{\partial\psi}{\partial y} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right) + C\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\dfrac{\partial\psi}{\partial y}, \\ C_1 = A\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + 2B\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\dfrac{\partial\psi}{\partial y} + C\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2. \end{cases} \tag{2.5}$$

При преобразовании (2.2) порядок дифференциального уравнения (2.1) не может увеличиться. Заметим, что в уравнении (2.4) коэффициенты $A_1 = A_1(\xi, \eta)$, $B_1 = B_1(\xi, \eta)$ и $C_1 = C_1(\xi, \eta)$ не могут одновременно обращаться в нуль.

Действительно, производя обратное преобразование

$$x = \varphi_1(\xi, \eta), \quad y = \psi_1(\xi, \eta),$$

мы должны вернуться к исходному уравнению (2.1), где $A^2 + B^2 + C^2 \neq$ $\neq 0$. А это невозможно, если в некоторой точке (ζ, η) имеем $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 = 0$.

Таким образом, уравнение (2.4) также есть уравнение второго порядка.

Легко непосредственно убедиться, что

$$B_1^2 - A_1 C_1 = J^2(B^2 - AC). \tag{2.6}$$

Отсюда следует инвариантность типа уравнения при преобразовании переменных.

Таким образом, при невырожденной замене независимых переменных в линейном дифференциальном уравнении не меняется:

1) порядок уравнения,
2) линейность,
3) тип уравнения.

2. Характеристики уравнения.

Определение. Под *характеристическим* семейством кривых понимается однопараметрическое семейство, обладающее тем свойством, что если параметр семейства принять за новую криволинейную координату, то в преобразованном дифференциальном уравнении будет отсутствовать член, содержащий вторую производную неизвестной функции по этой координате.

Всякая кривая, входящая в характеристическое семейство, называется *характеристикой*.

Например, если

$$\xi = \varphi(x, y)$$

— характеристическое семейство, то $A_1 = 0$, то есть

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0 \tag{2.7}$$

в силу соотношения (2.5).

Пусть

$$\varphi(x, y) = \xi = \text{const} \tag{2.8}$$

— некоторая фиксированная характеристика. Дифференцируем (2.8):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = 0$$

или

$$\frac{dy}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{dx}{-\frac{\partial\varphi}{\partial y}} = K = \text{const}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{dy}{K}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{dx}{K}. \tag{2.9}$$

Подставляя (2.9) в (2.7), будем иметь:

$$\frac{A(dy)^2 - 2Bdxdy + C(dx)^2}{K^2} = 0$$

или

$$A(dy)^2 - 2Bdxdy + C(dx)^2 = 0. \tag{2.10}$$

Полученное уравнение (2.10) называется *дифференциальным уравнением характеристик*.

При $dx \neq 0$ оно эквивалентно следующему уравнению:

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \tag{2.11}$$

Аналогично, если $\eta = \psi(x, y)$ — характеристическое семейство, то $C_1 = 0$, а характеристики удовлетворяют также уравнение (2.10).

Итак, если выбрать в качестве новых независимых переменных ξ и η характеристики, т. е. общие интегралы уравнения (2.10), то преобразованное уравнение (2.4) примет наиболее простой вид.

3. Канонический вид уравнения гиперболического типа. Для уравнения гиперболического типа в области D справедливо неравенство $B^2 - AC > 0$, а общие интегралы $\varphi(x, y) = \text{const}$, $\psi(x, y) = \text{const}$ уравнений (2.11) действительны и различны. Поэтому уравнение гиперболического типа имеет два различных семейства действительных характеристик.

Пусть в преобразовании (2.2)

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y). \tag{2.12}$$

Тогда в силу (2.5) в уравнении (2.4) коэффициенты

$$A_1 = C_1 = 0.$$

Якобиан J в рассматриваемой области предполагается отличным от нуля. Поэтому из соотношения (2.6) следует, что

$$B_1 \neq 0,$$

и уравнение (2.4) примет вид:

$$2B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F_1.$$

Разделив на $2B_1$, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = f_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \qquad (2.13)$$

Это — *канонический вид уравнения гиперболического типа.*

Полагая $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$, где $\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}$, $\beta = \frac{\xi - \eta}{2}$ — новые переменные, можно получить вторую каноническую форму уравнения гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = f^* \quad (f^* = 4f_1).$$

Простейшим примером уравнения данного типа может служить уравнение колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

4. Канонический вид уравнения параболического типа. Для уравнения параболического типа в области D

$$B^2 - AC = 0. \qquad (2.14)$$

Следовательно, один из коэффициентов A и C отличен от нуля, так как мы предполагали, что коэффициенты A, B и C уравнения (2.1) не обращаются одновременно в нуль.

Пусть, например, $A \neq 0$. Тогда уравнения (2.11) совпадают:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A}. \qquad (2.15)$$

Мы получаем один общий интеграл уравнения характеристик (2.10):

$$\varphi(x, y) = \text{const}.$$

Следовательно, уравнение параболического типа имеет одно семейство действительных характеристик.

Предполагая, что $\frac{\partial\varphi}{\partial x}\neq 0$, в уравнение (2.1) введем новые переменные

$$\xi=\varphi(x,y),\quad \eta=y; \tag{2.16}$$

при этом

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y}\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\neq 0.$$

Тогда в силу (2.5) в уравнении (2.4) коэффициент $A_1=0$, а

$$B_1=A\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+C\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}=B\frac{\partial\varphi}{\partial x}+C\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \tag{2.17}$$

Покажем, что коэффициент $B_1=0$. Для этого уравнение (2.7), которому удовлетворяют семейства характеристик

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0, \tag{2.18}$$

умножим и разделим на C. Используя соотношения (2.14) и (2.17), получим

$$\frac{(AC-B^2)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(B\frac{\partial\varphi}{\partial x}+C\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}{C}=\frac{B_1^2}{C}=0,$$

откуда следует, что $B_1=0$.

Таким образом, уравнение (2.1) параболического типа в новых переменных (2.16) принимает следующий вид:

$$C_1\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=F_1$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=f_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \tag{2.19}$$

Это — *канонический вид уравнения параболического типа.*

Примером уравнения параболического типа может быть уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial y}$$

Заметим, что если коэффициент $C = 0$, то из (2.14) получаем $B = 0$, т. е. тогда уравнение (2.1)изначально имеет канонический вид (2.19) и преобразование (2.16) излишне.

Можно показать, что в параболическом случае любое преобразование вида:

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y)$$

с якобианом $J \neq 0$ приводит уравнение (2.1) к каноническому виду.

5. Канонический вид уравнения эллиптического типа. Для уравнения эллиптического типа в области D справедливо неравенство $B^2 - AC < 0$ и правые части уравнений (2.11) комплексны. Пусть

$$\varphi(x, y) = \text{const}, \quad \psi(x, y) = \text{const}$$

— комплексные интегралы этих уравнений. Переходя к комплексным переменным

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \qquad (2.20)$$

получим, как и в случае уравнения гиперболического типа, преобразованное уравнение (2.4) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = f_1. \qquad (2.21)$$

Чтобы не иметь дела с комплексными переменными, введем новые переменные α и β:

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}; \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2i},$$

так что

$$\xi = \alpha + i\beta; \quad \eta = \alpha - i\beta.$$

При этом уравнение (2.21) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial u}{\partial\xi}\right] = \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial\xi}\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{1}{2} + \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{1}{2i}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}\frac{1}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}\left(-\frac{1}{2i}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2i}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial\beta\partial\alpha}\frac{1}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\left(-\frac{1}{2i}\right)\right] = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\right) = f_1$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} = f^*, \qquad (2.22)$$

где $f^* = 4f_1$.

Это — ***канонический вид уравнения эллиптического типа.***

Простейшим примером уравнения эллиптического типа является уравнение Лапласа.

Замечание. Может случиться, что уравнение (2.1) в разных частях области D принадлежит различным типам. Примером такого уравнения смешанного типа может служить уравнение Трикоми

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

При $y > 0$ оно принадлежит эллиптическому типу, при $y < 0$ — гиперболическому типу, а $y = 0$ — линия параболичности.

§ 3. Задачи с начальными данными

1. Задача Коши. Рассмотрим общую постановку задачи с начальными данными для уравнения:

$$L[u] = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{3.1}$$

где оператор

$$L[u] = A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{3.2}$$

Пусть на плоскости $0xy$ задается некоторая гладкая кривая K, на которой задаются значения функции и ее производной:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ u|_K = \varphi(x, y); \\ &2)\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_K = \psi(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Начальные условия (3.3) называются *начальными данными Коши*, а кривая K — *носительницей начальных данных*.

Задача Коши ставится так: требуется найти решение уравнения (3.1), удовлетворяющее данным Коши (3.3).

Замечание 1. Начальные условия (3.3) позволяют найти значения производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ на кривой K, задаваемой уравнением $y = \theta(x)$.

Действительно, вдоль этой кривой

$$u(x, \theta(x)) = \varphi(x, \theta(x)). \tag{3.4}$$

Дифференцируя соотношение (3.4) по x, получим

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_K + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_K \cdot \theta'(x) = \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_K,$$

откуда, учитывая (3.3), будем иметь

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_K = \frac{d}{dx}\varphi(x, \theta(x)) - \psi(x, y)\theta'(x). \qquad (3.5)$$

Замечание 2. Начальные условия Коши нельзя задавать на характеристиках (задача не будет иметь решения или будет неопределенной).

Замечание 3. Задача Коши обычно ставится для уравнений гиперболического и параболического типов. Для уравнений эллиптического типа она не рассматривается, так как может быть некорректной*. Например, задача Коши для уравнения Лапласа является некорректно поставленной. Поэтому для уравнений эллиптического типа обычно ставятся краевые задачи.

Пример. Пусть требуется решить задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (3.6)$$

с начальными данными

$$u|_K = x^2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_K = x, \qquad (3.7)$$

задаваемыми на линии K:

$$y = 2x. \qquad (3.8)$$

Рассматриваемое уравнение (3.6) — гиперболического типа, так как

$$A = 1, \; B = 0, \; C = -1$$

и $B^2 - AC = 1 > 0$. Для него уравнение характеристик (2.10) имеет вид $(dy)^2 - (dx)^2 = 0$ или $(dy - dx)(dy + dx) = 0$. Отсюда, решая уравнения $dy - dx = 0$ и $dy + dx = 0$, получаем два семейства действительных характеристик

$$\text{(I)}\; y - x = C_1 \;\text{ и }\; \text{(II)}\; y + x = C_2.$$

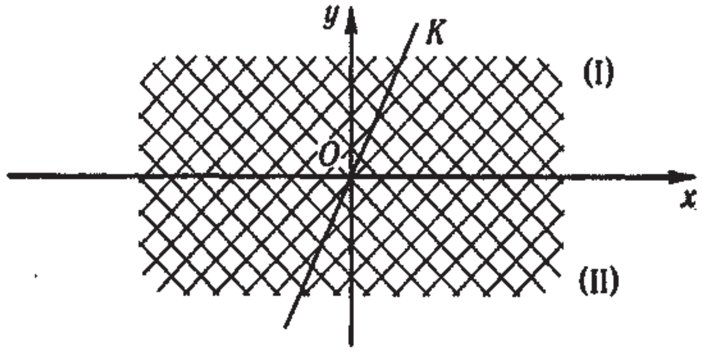

Рис. 4

* См. § 5, п. 2.

Вводим координаты: $\xi = y - x,\ \eta = y + x$.

Тогда уравнение (3.6) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0 \tag{3.9}$$

или $\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right) = 0$. Обозначая $\frac{\partial u}{\partial\xi} = \varphi_1(\xi)$, будем иметь

$$u = \int\varphi_1(\xi)d\xi + \psi(\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

или, возвращаясь к старым переменным $(x,\ y)$, получим решение уравнения (3.6) в виде

$$u(x,y) = \varphi(y - x) + \psi(y + x), \tag{3.10}$$

где φ и ψ — произвольные функции.

Обеспечим выполнение начальных условий (3.7):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\varphi'(y-x) + \psi'(y+x)$$

$$x^2 = u\Big|_{y=2x};\quad x = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=2x}$$

или

$$\begin{gathered} x^2 = \varphi(2x - x) + \psi(2x + x) = \varphi(x) + \psi(3x); \\ x = -\varphi'(x) + \psi'(3x). \end{gathered} \tag{3.11}$$

Интегрируя второе из уравнений системы (3.11), получим

$$\frac{x^2}{2} + C = -\int\varphi'(x)dx + \int\psi'(3x)dx = -\varphi(x) + \frac{1}{3}\psi(3x).$$

Складывая это выражение с первым уравнением системы (3.11), будем иметь

$$\frac{3}{2}x^2 + C = \frac{4}{3}\psi(3x).$$

Отсюда

$$\psi(3x) = \frac{9}{8}x^2 + \frac{3}{4}C$$

или

$$\psi(x) = \frac{9}{8}\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \frac{3}{4}C = \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}C$$

и соответственно

$$\varphi(x) = x^2 - \psi(3x) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}C.$$

Следовательно,

$$u = \varphi(y-x) + \psi(y+x) = -\frac{1}{8}(y-x)^2 - \frac{3}{4}C + \frac{1}{8}(y+x)^2 + \frac{3}{4}C = \frac{1}{2}xy.$$

2. Задача Гурса. Рассмотрим задачу с данными на характеристиках. Эту краевую задачу называют *задачей Гурса*. Она встречается, например, при изучении процессов сорбции и десорбции газов, процессов сушки воздушным потоком, прогревания трубы потоком воды и многих других процессов.

Мы рассмотрим задачу Гурса на примере простейшего уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x,y). \tag{3.12}$$

Для него уравнение характеристик (2.10) имеет вид

$$dx \cdot dy = 0,$$

т. е. $dx = 0$ или $dy = 0$. Эти уравнения имеют соответственно решения y и x. Следовательно,

$$x = \text{const}, \;\; y = \text{const}$$

— семейства характеристик рассматриваемого уравнения (3.12).

Пусть дополнительные условия даны на прямых $x = 0$ и $y = 0$, являющихся характеристиками данных семейств:

$$u(x, 0) = \varphi_1(x); \;\; u(0, y) = \varphi_2(y). \tag{3.13}$$

Итак, требуется решить задачу Гурса: найти решение уравнения (3.12), принимающее заданные значения (3.13) на характеристиках $x = 0$ и $y = 0$.

Будем считать, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$ дифференцируемы и удовлетворяют условию сопряжения:

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0).$$

Интегрируя уравнение (3.12) последовательно по x и по y, будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(0, y) + \int_0^x f(\xi, y)d\xi,$$

$$u(x, y) = u(x, 0) + u(0, y) - u(0, 0) + \int_0^y d\eta \int_0^x f(\xi, \eta)d\xi$$

или, воспользовавшись данными (3.13), окончательно получим

$$u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta)d\xi\, d\eta. \tag{3.14}$$

Формула (3.14) представляет в явной аналитической форме решение поставленной задачи Гурса для простейшего уравнения (3.12). Из нее непосредственно следует единственность и существование решения этой задачи.

Пример 1. Определить тип и найти характеристики уравнения

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (x \neq 0,\ y \neq 0).$$

Решение. Так как коэффициенты этого уравнения

$$A = y^2,\ \ B = 0,\ \ C = -x^2,$$

то выражение

$$B^2 - AC = x^2 y^2 \geq 0$$

и, следовательно, вне осей координат данное уравнение принадлежит гиперболическому типу. Дифференциальное уравнение характеристик (2.10) имеет вид

$$y^2(dy)^2 - x^2(dx)^2 = 0$$

и распадается на два уравнения

$$ydy - xdx = 0 \ \text{ и } \ ydy + xdx = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем два семейства действительных характеристик

$$y^2 - x^2 = C_1 \ \text{ и } \ y^2 + x^2 = C_2,$$

из которых первое представляет собой семейство гипербол, а второе — семейство окружностей.

Пример 2. Привести к каноническому виду и решить уравнение

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (y \neq 0).$$

Решение. Так как для всех значений $y \neq 0$ выражение

$$B^2 - AC = \left(-\frac{y}{2}\right)^2 > 0,$$

то рассматриваемое уравнение принадлежит гиперболическому типу. Дифференциальное уравнение характеристик (2.10) имеет вид

$$x(dy)^2 + y(dx \cdot dy) = 0$$

и распадается на два уравнения

$$dy = 0 \text{ и } xdy + ydx = 0.$$

Следовательно, мы получаем два различных семейства действительных характеристик:

$$y = C_1 \text{ и } xy = C_2.$$

Введем вместо (x, y) новые переменные (ξ, η), полагая

$$\xi = y, \ \eta = xy.$$

Данное преобразование переменных является невырожденным, так как якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & y \\ 1 & x \end{vmatrix} = -y \neq 0$$

в рассматриваемой области.

Вычисляя производные в новых независимых переменных ξ и η по формулам (2.3), перепишем исходное уравнение следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{2}{\xi}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Решим это уравнение, для чего введем функцию $p = \frac{\partial u}{\partial \eta}$. Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{2}{\xi}p = 0 \text{ или } \frac{\partial}{\partial \xi}(\ln p) = -\frac{2}{\xi}.$$

Отсюда $\ln p = -2\ln \xi + \ln \varphi(\eta)$, где $\varphi(\eta)$ — произвольная функция переменной η. Потенцируя, получим

$$p = \frac{\varphi(\eta)}{\xi^2} \text{ или } \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\varphi(\eta)}{\xi^2}.$$

Интегрируя последнее равенство, находим

$$u = \frac{1}{\xi^2}\int \varphi(\eta) d\eta + F_2(\xi) = \frac{F_1(\eta)}{\xi^2} + F_2(\xi),$$

где F_1 и F_2 — две произвольные функции. Возвращаясь к первоначальным переменным, получаем окончательный *ответ*:

$$u(x, y) = \frac{F_1(x \cdot y)}{y^2} + F_2(y).$$

Пример 3. Привести к каноническому виду уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y\operatorname{tg}x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \operatorname{tg}^3 x\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (y \neq 0).$$

Решение. Это уравнение — параболического типа, так как выражение

$$B^2 - AC = 0.$$

Дифференциальное уравнение характеристик

$$(\operatorname{tg}x)dy + ydx = 0$$

имеет один общий интеграл

$$y\sin x = C.$$

Введем вместо (x, y) новые независимые переменные

$$\xi = y\sin x, \quad \eta = y.$$

Так как в рассматриваемой области $y \neq 0$, якобиан

$$J = y\cos x \neq 0,$$

то данное преобразование переменных является невырожденным.

Используя формулы (2.3), перепишем исходное уравнение в виде

$$\eta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2\xi\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{2\xi}{\eta^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Это — канонический вид рассматриваемого уравнения параболического типа.

Пример 4. Привести к каноническому виду уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Решение. Так как коэффициенты уравнения

$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = 5,$$

то

$$B^2 - AC = -1 < 0$$

и, следовательно, рассматриваемое уравнение принадлежит эллиптическому типу. Решая дифференциальное уравнение характеристик

$$(dy)^2 - 4dxdy + 5(dx)^2 = 0,$$

получаем два комплексно-сопряженных общих интеграла

$$(y - 2x) \pm ix = C_{1,2}.$$

Вводя новые независимые переменные

$$\xi = y - 2x, \quad \eta = x$$

и вычисляя производные по формулам (2.3), исходное уравнение приводим к следующему каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найти общее решение следующих уравнений:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$; б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = xy$; в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x}{y}$;

г) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a\frac{\partial u}{\partial y}$; д) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 \frac{\partial u}{\partial y}$; е) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

ж) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

2. Решить уравнение

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

где A, B, C — постоянные и $B^2 - AC > 0$, вводя новые независимые переменные

$$\xi = x + \lambda_1 y, \quad \eta = x + \lambda_2 y.$$

3. Решить уравнение

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

вводя новые независимые переменные

$$\xi = x, \quad \eta = x^2 + y^2.$$

4. Решить уравнение

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} - u = 0,$$

положив

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y}{x}$$

и приняв ξ и η за новые независимые переменные.

5. Определить тип и найти характеристики уравнений:

а) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial x}$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma u = 0$;

в) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 9x\frac{\partial u}{\partial y} - u = 0$;

г) $(1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

6. Привести к каноническому виду следующие уравнения:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

б) $(1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

в) $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

7. Привести к каноническому виду и решить следующие уравнения:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

б) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

в) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

8. Решить уравнения:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} \quad (y > 0)$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

в) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

г) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

д) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} - \cos x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

9. Найти области гиперболичности, эллиптичности и параболичности уравнений:

а) $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;$

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha\dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \alpha=\text{const},$

и привести их к каноническому виду в областях эллиптичности и гиперболичности.

10. Переходя к полярным координатам r и φ, полагая

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi,$$

решить уравнения:

а) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

б) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;$

в) $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=0.$

11. Найти решение $u(x, y)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+2y,$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u\big|_{y=x^2}=1.$$

12. Решить задачи Коши:

а) $\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2,\\ u\big|_{y=0}=1,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=x;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2,\\ u\big|_{y=0}=A\sin x,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=Bx;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2y^3,\\ u\big|_{y=x}=x^2\left(x^3+2\right),\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=x}=3x\left(x^3+1\right);\end{cases}$ г) $\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial x},\\ u\big|_{x=0}=A,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=B.\end{cases}$

13. Найти решение $u(x, y)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{y=0} = 3x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = 0.$$

14. Найти решение $u(x, y)$ уравнения

$$4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(1 - y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{2y}{1+y^2}\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{y=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \psi(x).$$

15. Найти решение $u(x, y)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin x\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{y=\sin x} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=\sin x} = \psi(x).$$

16. Найти решение $u(x, y)$ уравнения

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{y=1} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=1} = \psi(x).$$

Глава IV
ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Целью данной главы служит вывод и исследование уравнений с частными производными второго порядка, широко применяющихся в *математической физике*.

§ 1. Уравнение колебаний струны

1. Вывод уравнения колебаний струны. Понятие о граничных и начальных условиях. Рассмотрим *натянутую струну*, т. е. тонкую гибкую упругую нить, расположенную в плоскости Oxu, которая в результате известного *возмущения* была выведена из положения равновесия Ox. Изучим *поперечные колебания* струны, полагая, что при таком колебании струны ее точки движутся перпендикулярно оси Ox.

Обозначим через $u = u(x, t)$ — *смещение* точки струны с абсциссой x в момент времени t относительно Ox (рис. 5).

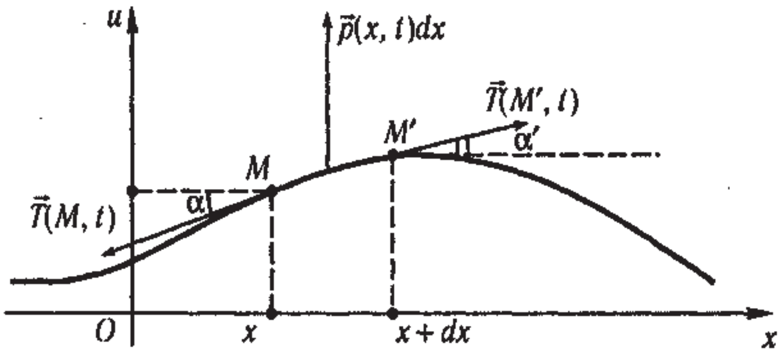

Рис. 5

Тогда функцией $u(x, t)$ при $0 \le t < \infty$ опишется процесс колебаний струны: для любого фиксированного момента времени $t = t_1$ выражением $u = u(x, t_1)$ определяется *мгновенный профиль* струны.

Сделаем следующие допущения:

1). Будем предполагать, что струна совершает малые колебания, т. е. ее форма в процессе колебаний незначительно отличается от прямой $u = 0$. Будем предполагать, что наклон касательной к графику функции $u = u(x, t)$, $t = \text{const}$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$, есть малая по модулю величина по сравнению с единицей. Отсюда получаем, что $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$ и $\cos\alpha \approx 1$.

2). К концам любого участка $\widehat{MM'}$ струны приложены направленные по касательной упругие силы натяжения (см. рис. 5), модули которых равны $\left(\left|\vec{T}(M,t)\right| = \left|\vec{T}(M',t)\right| = T_0\right)$ и являются практически постоянными, т. е. T_0 не зависит от x и t.

3). На струну действуют непрерывно распределенные внешние силы, перпендикулярные оси Ox, с плотностью (нагрузкой) $p(x, t)$, рассчитанной на единицу длины.

Вырежем из струны бесконечно малый элемент $\widehat{MM'}$, абсциссами которого являются x и $x + dx$. Воздействие отброшенных левой и правой частей струны заменим соответствующими силами натяжения. Тогда элемент $\widehat{MM'}$ можно рассматривать, как свободную материальную точку, находящуюся под действием упругих сил $\vec{T}(M,t)$, $\vec{T}(M',t)$ и внешней силы $p(x,t)dx \cdot \vec{e}_u$, где $\vec{e}_u$ — *орт* оси Ou.

Пусть $\rho(x)$ — линейная плотность струны в точке x. Так как в положении равновесия масса элемента равна $\rho(x)dx$, то, в силу сохранения массы, элемент $\widehat{MM'}$ имеет ту же массу. Обозначим через α и α' углы, образованные с осью Ox касательными к профилю струны в момент времени t в точках M и M' соответственно. Проектируя на ось Ou силы, приложенные к элементу $\widehat{MM'}$, в силу закона Ньютона и предположения 2) будем иметь

$$\rho(x)dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\sin\alpha' - T_0\sin\alpha + p(x,t)dx. \tag{1.1}$$

Согласно предположению 1) углы α и α' малы; поэтому

$$\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{1.2}$$

и

$$\sin\alpha' \approx \operatorname{tg}\alpha' = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+dx}. \tag{1.2$'$}$$

Для подсчета (1.2′) используем известную формулу математического анализа

$$f(x+dx) = f(x) + f'(x)dx,$$

справедливую с точностью до бесконечно малых высших порядков. Отсюда имеем:

$$\sin\alpha' \approx \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx. \tag{1.3}$$

Подставляя выражение (1.2) и (1.3) в формулу (1.1), получим

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t). \tag{1.4}$$

Мы получили искомое уравнение *малых вынужденных поперечных колебаний струны*.

В случае постоянной плотности ($\rho = \text{const}$) это уравнение обычно записывается в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + P(x,t). \tag{1.5}$$

где $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$, а $P = \frac{p(x,t)}{\rho}$ — плотность силы, отнесенная к единице массы.

При отсутствии внешней силы ($P(x, t) = 0$) мы получаем уравнение *малых свободных колебаний струны*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.6}$$

Уравнение (1.4), как показано выше, имеет бесчисленное множество решений. Поэтому для однозначной характеристики процесса колебаний необходимо к уравнению присоединить некоторые дополнительные условия, вытекающие из физического смысла данной задачи. Эти условия могут быть весьма разнообразными. В простейшем случае, как и в динамике точки, задается положение и скорость точек струны в начальный момент времени:

$$u(x,0) = \varphi(x); \;\; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x). \tag{1.7}$$

Эти условия, которым должно удовлетворять решение $u(x, t)$ при $t = 0$, называются *начальными условиями*.

Далее, если струна ограничена, то необходимо задать условия на ее концах. В частности, для струны, концы которой $x = 0$ и $x = l$ закреплены,

$$u(0, t) = 0; \;\; u(l, t) = 0 \tag{1.8}$$

при всяком $t \geq 0$. Условия (1.8) называются *граничными условиями*. Возможны и другие типы граничных условий.

Таким образом, физическая задача о колебаниях струны, закреплённой на концах, свелась к следующей математической задаче: найти решение $u(x, t)$ уравнения (1.4), удовлетворяющее начальным условиям (1.7) и граничным условиям (1.8). Это так называемая *смешанная краевая задача* для уравнения колебаний. К ней также можно прийти при изучении одномерных колебаний идеального газа или одномерных продольных колебаний стержня.

2. Замечание о «корректно поставленных» задачах. Математическое описание физического процесса начинается с постановки задачи, т. е. с вывода уравнения и формулирования условий, достаточных для однозначного определения этого процесса. Эти дополнительные условия, называемые *данными* задачи, должны обеспечить ей физическую определенность. Чаще всего данными задачи являются начальные условия, т. е. условия в некоторый момент времени, с которого начинается изучение физического процесса, и граничные условия, т. е. условия на границе области, в которой ищется решение. В поставленной выше задаче о колебаниях струны это условия (1.7) и (1.8).

Математическая задача, соответствующая физическому явлению, должна удовлетворять следующим трем требованиям: 1) решение должно существовать; 2) решение должно быть единственным; 3) решение должно непрерывно зависеть от данных задачи (требование устойчивости). То есть малым изменениям любого из данных задачи должны соответствовать малые изменения решения.

Задача, удовлетворяющая всем трем требованиям, называется *корректно поставленной задачей*.

Первое и второе требования означают, что среди данных задачи нет противоречащих друг другу и их достаточно для выделения единственного решения.

Третье требование необходимо, чтобы математическая задача правильно описывала наблюдаемые физические явления. В действительности данные задачи нельзя считать строго фиксированными, т. е. они (особенно экспериментально полученные) всегда заданы в некоторых пределах точности. Поэтому необходимо, чтобы малая погрешность в данных приводила к малой неточности в решении. Это требование «устойчивости» имеет существенное значение также для приближенных методов.

Мы будем рассматривать только классические корректно поставленные задачи. Однако следует заметить, что это далеко не единственные задачи, правильно отражающие физические явления. Имеются примеры задач, которые «некорректно поставлены». Их исследованию, особенно в приближенных вычислениях, в последнее время уделяется большое внимание.

3. Задача Коши для неограниченной струны. Формула Даламбера. Корректность задачи. Физическая интерпретация. Рассмотрим задачу с начальными условиями для неограниченной струны: найти решение $u(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (-\infty < x < \infty,\ t > 0) \tag{1.9}$$

с начальными условиями:

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \text{ при } -\infty < x < \infty, \tag{1.10}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — достаточно гладкие заданные функции.

Эту задачу называют *задачей Коши.*

Приведем уравнение колебаний струны (1.9) к виду, допускающему непосредственное интегрирование. Возьмем в качестве новых независимых переменных характеристики уравнения (1.9)

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at.$$

Вычислим производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right).$$

Уравнение в новых переменных запишем в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0.$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\eta),$$

где $f(\eta)$ — произвольная функция только переменной η. Интегрируя полученное уравнение по η при фиксированном ξ, получим:

$$u = \int f(\eta)d\eta + F_1(\xi) = F_1(\xi) + F_2(\eta),$$

где $F_1(\xi)$ и $F_2(\eta)$ являются функциями только переменных ξ и η. Возвращаясь к старым переменным, будем иметь

$$u(x,t) = F_1(x + at) + F_2(x - at). \tag{1.11}$$

Непосредственной подстановкой в уравнение убеждаемся, что полученная функция $u(x, t)$ является решением общего вида уравнения (1.9), если F_1 и F_2 — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Выберем функции F_1 и F_2 так, чтобы удовлетворить начальным условиям (1.10):

$$u(x,0)=F_1(x)+F_2(x)=\varphi(x),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=aF_1'(x)-aF_2'(x)=\psi(x).$$

Отсюда, интегрируя второе равенство, получим:

$$\begin{cases} F_1(x)+F_2(x)=\varphi(x), \\ F_1(x)-F_2(x)=\frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x}\psi(z)dz+C, \end{cases} \tag{1.12}$$

где x_0 и C — произвольные постоянные. Из равенств (1.12) находим

$$\begin{cases} F_1(x)=\frac{\varphi(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x}\psi(z)dz+\frac{C}{2}, \\ F_2(x)=\frac{\varphi(x)}{2}-\frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x}\psi(z)dz-\frac{C}{2}. \end{cases} \tag{1.13}$$

Эти формулы определяют функции F_1 и F_2 через заданные функции φ и ψ, причем равенства (1.13) справедливы при любом значении аргумента. Подставляя в (1.11) найденные значения $F_1(x)$ и $F_2(x)$, будем иметь

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\left\{\int\limits_{x_0}^{x+at}\psi(z)dz-\int\limits_{x_0}^{x-at}\psi(z)dz\right\}$$

или окончательно

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz. \tag{1.14}$$

Формула (1.14) дает решение задачи Коши (1.9)–(1.10) и называется *формулой Даламбера*.

Докажем, что задача Коши (1.9)–(1.10) поставлена корректно.

Действительно, непосредственной проверкой легко убедиться, что формула (1.14) удовлетворяет (в предположении, что $\varphi(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а $\psi(x)$ — до первого) уравнению и начальным условиям.

Далее, эта формула доказывает единственность решения. В самом деле, если бы существовало другое решение задачи (1.9) и (1.10), то оно давалось бы формулой Даламбера (1.14) и совпадало бы с первым.

Таким образом, решение существует и единственно.

Докажем, наконец, что решение непрерывно зависит от начальных данных, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что если заменить начальные значения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на $\overline{\varphi}(x)$ и $\overline{\psi}(x)$, отличающиеся друг от друга меньше, чем на δ:

$$\left|\varphi(\xi) - \overline{\varphi}(\xi)\right| < \delta, \quad \left|\psi(\xi) - \overline{\psi}(\xi)\right| < \delta \quad (-\infty < \xi < \infty), \tag{1.15}$$

то новое решение $\overline{u}(x, t)$ и первоначальное $u(x, t)$ будут различаться между собой меньше, чем на ε:

$$|u(x, t) - \overline{u}(x, t)| < \varepsilon$$

на любом конечном промежутке времени $0 \le t \le T$.

Доказательство этого утверждения сразу следует из формулы Даламбера (1.14), которая связывает функции $u(x, t)$ и $\overline{u}(x, t)$ со своими начальными значениями $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $\overline{\varphi}(x)$, $\overline{\psi}(x)$.

Действительно

$$|u(x, t) - \overline{u}(x, t)| \le \frac{|\varphi(x+at) - \overline{\varphi}(x+at)|}{2} +$$

$$+ \frac{|\varphi(x-at) - \overline{\varphi}(x-at)|}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}|\psi(z) - \overline{\psi}(z)|dz,$$

Откуда в силу неравенств (1.15) получаем:

$$|u(x,t) - \overline{u}(x,t)| \le \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2a}\delta \cdot 2at \le \delta(1+T),$$

что и доказывает наше утверждение, если положить

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1+T}.$$

Дадим физическую интерпретацию полученного решения (1.14) задачи Коши для неограниченной струны. Как мы видели, оно может быть представлено в виде суммы двух слагаемых:

$$u(x, t) = F_1(x + at) + F_2(x - at). \tag{1.11}$$

В каждый фиксированный момент времени t график функции $F_1(x+at)$ получается из графика $F_1(x)$ смещением влево на величину at, а график $F_2(x-at)$ — смещением графика $F_2(x)$ вправо на ту же величину. Если построены графики функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$, то для построения профиля струны в любой момент времени t достаточно сдвинуть кривую $F_1(x)$ влево на величину at, кривую $F_2(x)$ — вправо на ту же величину и затем для каждого x сложить графически ординаты полученных кривых. Полученная в результате сложения кривая даст форму (профиль) струны в момент времени t.

Функция $F_1(x+at)$ описывает волну, распространяющуюся влево со скоростью a, а функция $F_2(x-at)$ — волну, распространяющуюся вправо с той же скоростью a. Таким образом, профиль струны $u(x, t)$ есть суперпозиция двух волн.

Рассмотрим случай, когда начальные скорости точек струны равны нулю, т. е. $\psi(x) = 0$. Согласно формуле Даламбера (1.14) профиль струны определяется в этом случае графиком функции

$$u(x,t) = F_1(x+at) + F_2(x-at) = \\ = \frac{\varphi(x+at)}{2} + \frac{\varphi(x-at)}{2}.$$

Как уже отмечалось, он представляет собой сумму двух волн, распространяющихся налево и направо со скоростью a. Начальная форма обеих волн определяется функцией $\frac{\varphi(x)}{2}$, равной половине заданного начального отклонения. При перемещении форма этих волн остается неизменной.

Замечание. Функция $u(x, t)$, определенная формулой (1.14), может быть решением уравнения (1.9) только при условии дифференцируемости функций φ и ψ. Такое дважды непрерывно дифференцируемое решение называется *классическим решением*. Однако встречаются случаи, когда функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не имеют нужных производных. Например, если струна в начальный момент имеет форму ломаной линии, то $\varphi(x)$ не имеет определенной производной в вершине ломаной. В этих случаях считают, что формула Даламбера также дает решение задачи, хотя при этом функция $u(x, t)$ не всюду дважды дифференцируема. Такое решение называется *обобщенным решением задачи*. Определяемое формулой (1.14), оно является пределом решений уравнения колебаний с немного сглаженными начальными условиями.

4. Колебания полуограниченной струны. Рассмотрим задачу о поперечных колебаниях полуограниченной струны $x \geq 0$ с жестко закрепленным концом. Она может быть сформулирована следующим образом: найти решение $u(x, t)$ уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \tag{1.16}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(0, t) = 0 \tag{1.17}$$

и начальным условиям

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \tag{1.18}$$

при этом $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, иначе граничные и начальные условия противоречат друг другу.

Решим вспомогательную задачу для неограниченной струны, причем на отрицательную часть продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ нечетным образом, т. е.

$$\varphi(-x) = -\varphi(x), \quad \psi(-x) = -\psi(x).$$

Следовательно, начальными данными вспомогательной задачи являются нечетные функции

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \text{ и } \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0, \\ -\psi(-x), & x < 0, \end{cases} \tag{1.19}$$

а ее решение, согласно формуле Даламбера (1.14), дается функцией

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x + at) + \Phi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \Psi(z) dz, \tag{1.20}$$

определенной для всех x и для $t > 0$.

Покажем, что полученная функция $u(x, t)$ при $t > 0$, $x > 0$ удовлетворяет также дополнительным условиям (1.17) и (1.18), т. е. является решением поставленной исходной задачи. Действительно, функция $u(x, t)$, определяемая формулой (1.20), при $x = 0$ равна

$$u(0, t) = \frac{1}{2}[\Phi(at) + \Phi(-at)] + \frac{1}{2a} \int\limits_{-at}^{at} \Psi(z) dz = 0,$$

так как первое слагаемое равно нулю в силу нечетности $\Phi(x)$, а второе равно нулю, поскольку интеграл от нечетной функции в пределах, симметричных относительно начала координат, всегда равен нулю (см. лемму § 2). Кроме того, при $t=0$ эта функция удовлетворяет необходимым начальным условиям:

$$\begin{cases} u(x,0) = \Phi(x) = \varphi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \Psi(x) = \psi(x), \end{cases} \quad \text{при } x > 0.$$

Итак, решение задачи о распространении волн на полуограниченной прямой с граничным условием $u(0, t) = 0$ сводится к задаче о колебании неограниченной струны, если начальные данные продолжить на всю прямую нечетным образом.

5. Основная лемма метода Фурье.

Л е м м а. Если в прямоугольнике R плоскости $0xy$ (рис. 6):

$$(R) \quad \begin{cases} a < x < b, \\ A < y < B \end{cases}$$

для некоторых функций выполняется тождество

$$X(x) \equiv Y(y), \qquad (1.21)$$

то в этом случае

$$X(x) = Y(y) = \text{const}.$$

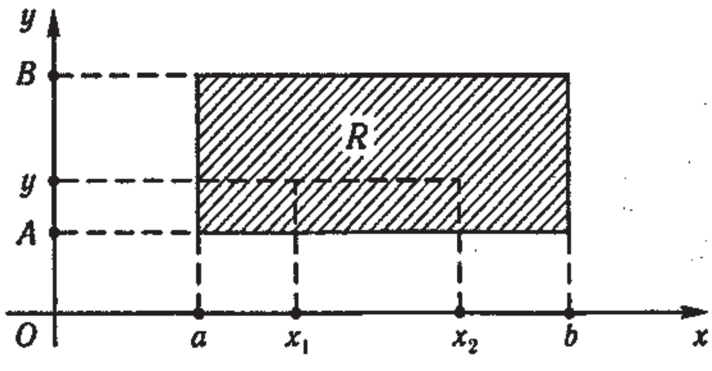

Рис. 6

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, т. е. что

$$X(x) \neq \text{const};$$

тогда существуют значения x_1 и x_2 в интервале (a, b) такие, что

$$X(x_1) \neq X(x_2).$$

Рассмотрим точки (x_1, y) и (x_2, y), принадлежащие прямоугольнику R. На R справедливо тождество (1.21), а потому

$$X(x_1) = Y(y),$$

$$X(x_2) = Y(y).$$

Сравнивая эти равенства, приходим к противоречию с нашим предположением. Следовательно,

$$X(x) = \text{const},$$

а тогда и

$$Y(y) = \text{const}.$$

6. Метод Фурье для уравнения колебаний ограниченной струны. Понятие о стоячих волнах. Метод Фурье (метод разделения переменных) является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Изложим этот метод на примере задачи о поперечных колебаниях струны, закрепленной на концах (в точках $x = 0$ и $x = l$). Как известно (§ 5, п. 1), эта задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.22}$$

с граничными условиями

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \tag{1.23}$$

и начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \quad (0 < x < l), \tag{1.24}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции.

Метод построения решения данной задачи заключается в том, что сначала находятся функции* $u_n(x, t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющие уравнению (1.22) и граничным условиям (1.23). Затем из этих частных решений составляется линейная комбинация

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x, t),$$

которая при любых значениях коэффициентов C_n в силу линейности и однородности уравнения и однородности граничных условий также

* Линейно независимые.

удовлетворяет уравнению и граничным условиям (*принцип суперпозиции*). Наконец, коэффициенты C_n составленного ряда выбираются такими, чтобы выполнялись начальные условия (1.24). Тем самым, построенная таким образом функция $u(x, t)$ будет удовлетворять всем условиям исходной задачи, т. е. будет являться ее решением.

Ищем частные решения уравнения (1.22), не равные тождественно нулю и удовлетворяющие граничным условиям (1.23), в виде произведения

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t), \tag{1.25}$$

где $X(x)$ — функция только переменной x, $T(t)$ — функция только переменной t.

Подставляя (1.25) в уравнение (1.22), получим

$$X(x)T''(t) \equiv a^2 X''(x)T(t)$$

или, разделив переменные:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} \equiv \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Левая часть тождества зависит только от t, а правая — только от x и на основании основной леммы Фурье представляют собой одну и ту же постоянную. Для удобства выкладок обозначим эту постоянную через $-\lambda^2$:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} \equiv \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.^* \tag{1.26}$$

Отсюда получаем систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.27}$$

Граничные условия (1.23) дают:

$$u(0, t) = X(0) \cdot T(t) = 0, \quad u(l, t) = X(l) \cdot T(t) = 0.$$

Так как ищутся нетривиальные решения, то $T(t) \neq 0$.

Поэтому функция $X(x)$ должна удовлетворять следующим дополнительным условиям:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{1.28}$$

---

* Если в уравнении (1.26) обозначить постоянную через $+\lambda^2$ вместо $-\lambda^2$, то для возникающих далее собственных значений получим мнимые величины. Это не отразится на конечном результате.

Следовательно, для получения не равного нулю решения вида (1.25), удовлетворяющего граничным условиям (1.23), мы приходим к следующей задаче (о собственных значениях): найти такие значения λ, при которых существуют нетривиальные решения первого уравнения из системы (1.27), удовлетворяющие граничным условиям (1.28).

Эти решения λ называются *собственными значениями* (их совокупность — *спектром*), а соответствующие решения X — *собственными функциями* краевой задачи (1.27) и (1.28). Найдем эти собственные значения и собственные функции.

Общее решение первого уравнения из (1.27) имеет вид

$$X(x) = C_1 \sin\lambda x + C_2 \cos\lambda x,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Удовлетворяя его граничным условиям (1.28), получим

$$C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0,$$

$$C_1 \sin\lambda l + C_2 \cos\lambda l = 0.$$

Отсюда $C_2 = 0$ и $C_1 \sin\lambda l = 0$.

Мы должны считать $C_1 \neq 0$, т. к. ищутся нетривиальные решения. Поэтому для определения λ получаем следующее *спектральное уравнение*:

$$\sin\lambda l = 0,$$

то есть

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{l},$$

где n — целое число.

Следовательно, нетривиальные решения задачи (1.27) и (1.28) возможны лишь при значениях

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.29}$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1.30}$$

определяемые с точностью до постоянного множителя, который без нарушения общности можно считать равным единице.

Значения λ_n, соответствующие $n = 0, -1, -2, \ldots$, не принимаем во внимание, так как они отвечают или нулевому решению

$$X_0(x) = 0$$

или линейно зависимому решению

$$X_{-n}(x) = -X_n(x).$$

Решение второго уравнения из (1.27) при $\lambda = \lambda_n$ имеет вид

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l},$$

где A_n и B_n — коэффициенты, подлежащие определению.

Таким образом, функции

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) =$$
$$= \left(A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

являются частными решениями уравнения (1.22), удовлетворяющими граничным условиям (1.23) при любых A_n и B_n.

В силу принципа суперпозиции решений линейного однородного уравнения ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{1.31}$$

также будет его решением, если ряд равномерно сходится, и его можно дважды почленно дифференцировать по x и t. Сумма этого ряда $u(x, t)$ удовлетворяет также и однородным граничным условиям (1.23), так как каждое слагаемое в (1.31) удовлетворяет этим условиям.

Определим коэффициенты A_n и B_n так, чтобы выполнялись начальные условия (1.24). Продифференцируем ряд (1.31) по t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}\left(-A_n \sin\frac{n\pi at}{l} + B_n \cos\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{1.32}$$

Полагая в (1.31) и (1.32) $t = 0$, в силу начальных условий (1.24) получим:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l} B_n \sin\frac{n\pi x}{l}. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Эти ряды представляют собою разложение заданных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд Фурье по синусам кратных дуг. Коэффициенты разложений (1.33) вычисляются по известным формулам (см. (2.12), с. 169) и имеют вид

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx; \\ B_n &= \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n=1,\,2,\,\ldots . \end{aligned} \tag{1.34}$$

Подставляя эти значения коэффициентов в (1.31), получим ряд, формально удовлетворяющий всем требованиям решаемой задачи.

Мы не останавливаемся на выяснении условий, при которых этот ряд сходится и представляет единственное решение, непрерывно зависящее от начальных данных задачи.

Дадим физическую интерпретацию полученного решения (1.31)

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t). \tag{1.35}$$

Слагаемые

$$u_n(x,t)=\varphi_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{1.36}$$

где

$$\varphi_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l},$$

называются *стоячими волнами*. Таким образом, форма струны в любой момент времени есть результат сложения бесконечного числа стоячих волн (*гармоник*). Из формулы (1.36) видно, что стоячая волна представляет собой «пульсирующую» синусоиду.

Точки

$$x_k=\frac{k}{n}l \qquad (k=1,\,2,\,\ldots,\,n-1),$$

в которых

$$\sin\frac{n\pi x}{l}=0,$$

в любой момент времени остаются неподвижными и называются *узлами* стоячей волны $u_n(x,t)$. Точки

$$x_m=\frac{2m-1}{2n}l \qquad (m=1,\,2,\,\ldots,\,n),$$

в которых

$$\sin\frac{n\pi x}{l} = \pm 1,$$

совершают колебания с максимальной амплитудой и называются *пучностями* стоячей волны. Период их колебания

$$\tau_n = 2\pi : \frac{n\pi a}{l} = \frac{2l}{na} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Для поперечных колебаний струны $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$ и, следовательно,

$$\tau_n = \frac{2l}{n}\sqrt{\frac{\rho}{T_0}}.$$

Полученная формула объясняет законы колебания струны, открытые впервые экспериментально.

§ 2. Уравнение теплопроводности

1. Вывод уравнения теплопроводности. Постановка задачи о распределении температуры в ограниченном стержне. Если температура тела неравномерна, то происходит процесс передачи тепла от участков более нагретых к участкам менее нагретым.

Рассмотрим однородный стержень длины l, направленный по оси x. Стержень теплоизолирован с боков и достаточно тонкий, чтобы считать температуру в каждом его сечении постоянной. Тогда процесс распространения тепла в стержне может быть описан функцией $u(x, t)$, представляющей температуру в сечении x в момент времени t. Для определенности предположим, что температура растет с увеличением x. Напомним некоторые закономерности, известные из физики.

Рассмотрим бесконечно малую площадку $d\sigma$, через которую проходит тепловой поток. Построим вектор нормали $\vec{n}$, направленный в сторону увеличения температуры. Тогда закон теплопроводности (*закон Фурье*) можно сформулировать следующим образом: количество тепла dQ_1, проходящее через бесконечно малую площадку $d\sigma$ за единицу времени, пропорционально ее площади и величине градиента температуры:

$$dQ_1 = -k\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma,$$

где k — коэффициент теплопроводности.

Согласно закону Фурье, количество тепла, проходящего через сечение с координатой x за промежуток времени $(t, t + dt)$ равно

$$dQ = -kS\frac{\partial u}{\partial x}dt, \tag{2.1}$$

где S — площадь поперечного сечения стержня. Для неоднородного стержня k зависит от x.

Рассмотрим бесконечно малый элемент стержня $[x, x + dx]$.

Количество тепла, которое необходимо сообщить элементу $[x, x + dx]$ за время dt, чтобы повысить его температуру на

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}dt,$$

равно

$$dQ = c\rho S dx \Delta u = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}S dx dt, \tag{2.2}$$

где c — удельная теплоемкость, ρ — плотность, $\frac{\partial u}{\partial t}$ — скорость изменения температуры.

Будем предполагать, что в некоторых частях стержня находятся тепловые источники. Пусть $q(x, t)$ — количество тепла, создаваемое тепловым источником, помещенным в точке x в момент времени t за единицу времени, отнесенное к единице массы стержня (интенсивность теплового источника). Тогда количество тепла, выделяемое на отрезке стержня $[x, x + dx]$ за промежуток времени $[t, t + dt]$ будет

$$dQ = q(x, t)\rho S dx dt. \tag{2.3}$$

Выделение или поглощение тепла может происходить, например, вследствие химических реакций, в результате прохождения электрического тока и т. д.

Выведем уравнение, которому должна удовлетворять функция $u(x, t)$. Для этого составим уравнение теплового баланса для бесконечно малого элемента стержня $[x, x + dx]$ за промежуток времени dt. Воспользовавшись приближенной формулой

$$f(x + dx) \approx f(x) + f'(x)dx, \tag{2.4}$$

а также соотношениями (2.1) и (2.3), получим для количества тепла, накопленного элементом стержня за время dt, следующее выражение:

$$\begin{aligned} dQ &= -kS\frac{\partial u}{\partial x}dt + kS\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx\right)dt + \\ &+ q(x, t)\rho S dx dt = \left[k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho q(x,t)\right]S dx dt. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Та же величина dQ получается на основании изменения температуры элемента стержня на величину $\frac{\partial u}{\partial t}dt$ и определяется формулой (2.2). Приравнивая оба выражения, получим:

$$\left[k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho q(x,t)\right]Sdxdt = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}Sdxdt.$$

Отсюда, введя обозначения

$$\frac{k}{c\rho} = a^2, \quad f(x,t) = \frac{1}{c}q(x,t),$$

будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t). \tag{2.6}$$

Это уравнение называется *уравнением теплопроводности*. Очевидно, если тепловые источники отсутствуют, то

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.7}$$

Для выделения единственного решения уравнения теплопроводности необходимо к уравнению присоединить начальные и граничные условия.

Начальные условия (в отличие от уравнения колебаний) состоят лишь в задании значений функции $u(x, t)$ в начальный момент времени $t = 0$:

$$u(x,0) = \varphi(x). \tag{2.8}$$

Граничные условия могут быть различны, в зависимости от температурного режима на границе. Например, если на концах стержня поддерживается постоянная температура (в точке $x = 0$ — температура A, в точке $x = l$ — температура B), то граничные условия имеют вид:

$$u(0,t) = A, \quad u(l,t) = B. \tag{2.9}$$

Таким образом, задача о распределении температуры в однородном ограниченном стержне с постоянной температурой на его концах ставится так: найти решение уравнения теплопроводности (2.6), удовлетворяющее начальному условию (2.8) и граничным условиям (2.9).

2. Вывод уравнения диффузии. Рассмотрим трубку, заполненную веществом, концентрация которого в каждом поперечном сечении одинакова и меняется от сечения к сечению. Тогда, как известно, имеется диффузия вещества из мест с более высокой концентрацией в места с меньшей концентрацией.

Математически такой процесс диффузии может быть описан функцией $c(x, t)$, представляющей концентрацию в сечении x в момент времени t. Получим уравнение, которому удовлетворяет эта функция, для чего составим уравнение баланса массы вещества на отрезке $[x, x + dx]$ за промежуток времени dt.

Пусть $c(x, t)$ увеличивается с ростом x. Согласно *закону Нернста*, количество вещества, проходящее в единицу времени через данное поперечное сечение, пропорционально его площади S и градиенту концентрации, т. е. за время dt оно равно

$$dQ = -\eta S\frac{\partial c}{\partial x}dt, \tag{2.10}$$

где η — коэффициент диффузии.

Используя формулы (2.4) и (2.10), получим, что количество вещества dQ, накопленное выделенным отрезком $[x, x + dx]$ за время dt, равно

$$dQ = -\eta S\frac{\partial c}{\partial x}dt + \eta S\left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}dx\right)dt = \eta S\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}dxdt. \tag{2.11}$$

С другой стороны, изменение концентрации за время dt

$$\Delta c = \frac{\partial c}{\partial t}dt,$$

а следовательно,

$$dQ = Sdx\Delta c = S\frac{\partial c}{\partial t}dxdt. \tag{2.12}$$

Приравнивая выражения (2.11) и (2.12), получим:

$$\eta S\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}dxdt = S\frac{\partial c}{\partial t}dxdt$$

или

$$\frac{\partial c}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \tag{2.13}$$

где $a^2 = \eta$. Это и есть искомое *уравнение диффузии*. Оно совершенно аналогично уравнению теплопроводности (2.7).

При выводе этого уравнения мы предполагали, что диффузия через стенки трубки отсутствует и внутри трубки нет источников вещества. При наличии источников получается неоднородное уравнение, аналогичное уравнению (2.6). Поскольку уравнения (2.13) и (2.7) одинаковы, то краевые задачи для них ставятся также одинаковым образом.

3. Решение краевой задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье. Температурные волны. Пусть на отрезке $[0, l]$ оси Ox расположен тонкий однородный стержень, боковая поверхность которого теплоизолирована от окружающей среды. Положим, что на концах этого стержня поддерживается постоянная температура: на левом конце — температура A, на правом — температура B. Начальное распределение температуры в стержне зададим функцией $\varphi(x)$. Найдем температуру в точке x в момент времени $t > 0$, предполагая, что внутри стержня отсутствуют источники и поглотители тепла.

Эта задача, как известно (см. § 2, п. 1), заключается в решении дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.14а}$$

при начальном условии

$$u(x, 0) = \varphi(x) \tag{2.15а}$$

и при граничных условиях:

$$u(0, t) = A, \quad u(l, t) = B. \tag{2.16а}$$

Сделаем замену переменных такую, чтобы новая неизвестная функция удовлетворяла однородным граничным условиям. А именно, введем функцию $v(x, t)$, связанную с искомой функцией $u(x, t)$ соотношением:

$$v(x, t) = u(x, t) - \left(\frac{B-A}{l}x + A\right).$$

Функция $v(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{2.14б}$$

начальному условию

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= u(x, 0) - \left[\frac{B-A}{l}x + A\right] = \\ &= \varphi(x) - \left[\frac{B-A}{l}x + A\right] = \varphi_1(x) \end{aligned} \tag{2.15б}$$

и однородным граничным условиям:

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0. \tag{2.16б}$$

Однородное уравнение (2.14б) с неоднородным начальным условием (2.15б) и однородными граничными условиями (2.16б) можно решать методом Фурье совершенно так же, как мы решали задачу о колебаниях струны, закрепленной на концах.

Именно, будем сначала искать нетривиальные решения уравнения (2.14б), удовлетворяющие граничным условиям (2.16б), в виде произведения

$$v = X(x)T(t) \not\equiv 0. \tag{2.17}$$

Подставляя (2.17) в уравнение (2.14б), получим

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

или

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 = \text{const} \tag{2.18}$$

в силу основной леммы метода Фурье. Отсюда

$$T'(t) + a^2\lambda^2T(t) = 0, \tag{2.19}$$

$$X''(x) + \lambda^2X(x) = 0. \tag{2.20}$$

Граничные условия (2.16б) дают

$$X(0)T(t) = 0, \quad X(l)T(t) = 0,$$

откуда

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{2.21}$$

Следовательно, мы приходим к задаче о собственных значениях:

$$\left.\begin{aligned} &X''(x) + \lambda^2X(x) = 0, \\ &X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \end{aligned}\right\}$$

уже исследованной в § 1, п. 6 при изучении колебаний однородной ограниченной струны. Там было показано, что только при значениях λ, равных

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.22}$$

существуют нетривиальные решения задачи (2.20) и (2.21):

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{2.23}$$

(линейно независимые).

При $\lambda = \lambda_n$ уравнение (2.19) имеет решение в виде

$$T_n(t) = A_n e^{-b^2n^2t}, \tag{2.24}$$

где A_n — подлежащие определению коэффициенты, а

$$b^2 = \frac{a^2\pi^2}{l^2} > 0.$$

Таким образом, согласно (2.17), каждая функция

$$v_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = A_n e^{-b^2 n^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (2.25)$$

будет решением уравнения (2.14б), удовлетворяющим граничным условиям (2.16б). Тому же самому уравнению и тем же самым граничным условиям в силу принципа суперпозиции будет удовлетворять ряд

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-b^2 n^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad (2.26)$$

Выберем коэффициент A_n так, чтобы выполнялось начальное условие (2.15б). Полагая $t = 0$, получим

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad (2.27)$$

Написанный ряд представляет собою разложение заданной функции $\varphi_1(x)$ в ряд Фурье по синусам кратных дуг. Коэффициенты A_n определяются по известной формуле (см. (2.12), с. 170) простым интегрированием:

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_1(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_0^l \left\{\varphi(x) - \left[A + \frac{B-A}{l}x\right]\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}dx =$$
$$= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx - \frac{2}{n\pi}\left[A + (-1)^{n+1}B\right]. \qquad (2.28)$$

Ряд (2.26) с коэффициентами (2.28) формально будет удовлетворять всем условиям задачи (2.14б)–(2.16б).

Слагаемые $v_n(x, t)$ ряда (2.26) могут быть интерпретированы как температурные волны. Амплитуда температурных волн уменьшается со временем, т. к. в нее входит множитель $e^{-b^2 n^2 t}$.

Теперь мы можем написать окончательное решение исходной краевой задачи (2.14а)–(2.16а):

$$u(x,t) = A + \frac{B-A}{l}x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-b^2 n^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (2.29)$$

где коэффициенты A_n выражаются формулой (2.28).

Исследуем полученное решение при $t \to \infty$.

Обозначим

$$u_\infty(x) = \lim_{t\to\infty} u(x,t).$$

Если ряд сходится равномерно, то

$$u_\infty(x) = A + \frac{B-A}{l}x.$$

Таким образом, предельный режим — это линейное распределение температуры (рис. 7).

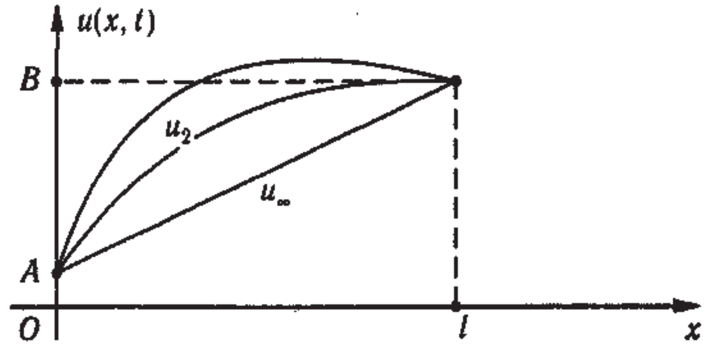

Рис. 7

В заключение отметим, что мы ограничились лишь формальным построением решения и не будем останавливаться на выяснении условий, при которых ряд (2.29) представляет функцию, удовлетворяющую всем условиям исходной краевой задачи. Можно показать также, что эта задача поставлена корректно для $t > 0$ и некорректно для отрицательных t, если начальное условие дано при $t = 0$.

4. Задача о распределении температуры в бесконечном стержне. Интеграл Пуассона. Пусть мы имеем бесконечный однородный стержень, теплоизолированный с боков, ось которого примем за ось Ox. Температуру стержня в точке x в момент времени t обозначим через $u = u(x, t)$ — это интересующая нас функция.

В отсутствии источников тепла функция u должна удовлетворять уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < +\infty,\ t > 0), \tag{2.30}$$

где a^2 — физическая константа. Поставим следующую задачу: зная начальное распределение температуры

$$u(x, 0) = f(x), \tag{2.31}$$

найти температуру точек стержня $u(x, t)$ для любого последующего момента времени $t > 0$.

Из физических соображений будем предполагать, что температура стержня в бесконечно удаленных точках $x = \pm\infty$ не может быть бесконечно большой.

Для нахождения частных решений уравнения (2.30), как и в п. 3, применим *метод разделения переменных*, т. е. будем искать его решения специального вида

$$u = X(x)T(t) \not\equiv 0, \tag{2.32}$$

где $X(x)$ — функция только от x и $T(t)$ — функция только от t.

Подставляя выражение (2.32) в уравнение (2.30), получим

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t),$$

или в силу основной леммы (§ 1, п. 5) будем иметь

$$\frac{X''(x)}{X(x)} \equiv \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda^2 = \text{const}. \tag{2.33}$$

Отсюда получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ T'(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.34}$$

Так как характеристическое уравнение для первого уравнения системы (2.34) имеет вид

$$k^2 + \lambda^2 = 0$$

и, следовательно,

$$k_{1,2} = \pm i\lambda,$$

то можно положить

$$X(x) = A(\lambda)e^{i\lambda x}. \tag{2.35}$$

Аналогично получаем

$$T(t) = B(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}. \tag{2.36}$$

Отсюда

$$u_\lambda = X(x)T(t) = c(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda x}, \tag{2.37}$$

где

$$c(\lambda) = A(\lambda)B(\lambda).$$

Параметр λ в формуле (2.37) должен быть действительным, причем $-\infty < \lambda < +\infty$, так как в противном случае u_λ была бы бесконечно большой при $x = -\infty$ или при $x = +\infty$, что физически невозможно.

Положим

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_\lambda d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda x} d\lambda. \tag{2.38}$$

Функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности (2.30).

Действительно, полагая

$$L[u] = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.39}$$

и предполагая законность дифференцирования по параметрам x и t под знаком несобственного интеграла (2.38), будем иметь:

$$L[u] = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} c(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda x}d\lambda - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} c(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda x}d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} -a^2\lambda^2 c(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda x}d\lambda + a^2\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 c(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda x}d\lambda \equiv 0.$$

Для функции (2.38) обеспечим теперь выполнение начального условия (2.31). Полагая $t = 0$, получим

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda. \tag{2.40}$$

Сравнивая интеграл (2.40) с интегралом Фурье (см. гл. II, § 2, п. 9, формулы (2.31), (2.31а) и (2.31б))

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi,$$

находим

$$c(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi. \tag{2.41}$$

Следовательно,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)}d\xi. \tag{2.42}$$

Изменяя в формуле (2.42) порядок интегрирования, будем иметь

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)G(\xi, x, t)d\xi,$$

где

$$G(\xi; x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)}d\lambda \tag{2.43}$$

— так называемая *функция Грина*.

Интеграл (2.43) может быть найден в конечном виде. Из курса анализа известно значение интеграла вероятностей:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}. \tag{2.44}$$

Можно показать, что формула (2.44) остается верной, если x на комплексной плоскости пробегает прямую $x = \alpha + i\beta$, $(-\infty < \alpha < \infty)$, параллельную действительной оси, т. е.

$$\int_{-\infty+i\beta}^{+\infty+i\beta} e^{-x^2}\,dx = e^{\beta^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha^2+2i\alpha\beta)}\,d\alpha = \sqrt{\pi}.$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha^2+2i\alpha\beta)}\,d\alpha = \sqrt{\pi}\,e^{-\beta^2}. \tag{2.45}$$

Полагая в формуле (2.43)

$$a^2\lambda^2 t = \mu^2 \qquad (-\infty < \mu < +\infty),$$

последовательно получим

$$\lambda = \frac{\mu}{a\sqrt{t}}, \quad d\lambda = \frac{d\mu}{a\sqrt{t}}$$

и с учетом (2.45)

$$\begin{aligned} G(\xi; x, t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\mu^2 + \frac{i(x-\xi)}{a\sqrt{t}}\mu\right]}\frac{d\mu}{a\sqrt{t}} = \\ &= \frac{1}{2\pi a\sqrt{t}}\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Подставляя это выражение в формулу (2.42), получаем *интеграл Пуассона*

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi,$$

дающий распределение температуры в точках бесконечного стержня для любого момента времени $t \in (0, +\infty)$.

§ 3. Уравнение Лапласа

1. Распространение тепла в однородной пластинке. Процесс распространения тепла в тонкой пластинке может быть описан функцией $u(x, y, t)$, характеризующей температуру пластинки в данной точке $M(x, y)$ в данный момент времени t.

Обозначим:

$\rho = \text{const}$ — плотность пластинки,

c — удельная теплоемкость,

$k = \text{const}$ — коэффициент теплопроводности,

h — толщина пластинки.

Предположим, что источники тепла в пластинке отсутствуют.

Найдем уравнение, которому должна удовлетворять функция $u(x, y, t)$. Поступим так же, как и при выводе уравнения теплопроводности для стержня (см. § 2, п. 1). Выделим в пластинке бесконечно малый элемент $dS = dxdy$ (рис. 8) и составим для него уравнение теплового баланса. Для определенности предположим, что тепло растет в положительном направлении осей x и y (заметим, что окончательный результат не зависит от этого предположения).

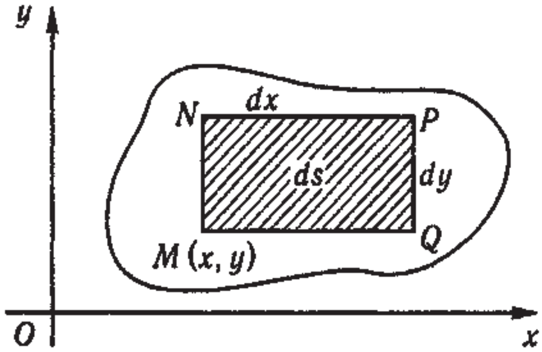

Рис. 8

Согласно закону теплопроводности, количество тепла, протекающего через сечение MN площади hdy за промежуток времени dt, равно

$$-k\frac{\partial u}{\partial x}hdydt,$$

а через сечение PQ, в силу формулы (2.4) для функции $\frac{\partial u}{\partial x}$, равно

$$-k\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx\right)hdydt.$$

Аналогично, для сечения MQ площади hdx имеем:

$$-k\frac{\partial u}{\partial y}hdxdt,$$

а для сечения NP:

$$-k\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy\right)hdxdt.$$

Поэтому количество тепла dQ, накопленное элементом за время dt, равно

$$dQ = -k\frac{\partial u}{\partial x}hdydt + k\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx\right)hdydt -$$

$$- k\frac{\partial u}{\partial y}hdxdt + k\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy\right)hdxdt.$$

или

$$dQ = kh\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dSdt. \tag{3.1}$$

За время dt температура повысится на величину

$$du = \frac{\partial u}{\partial t}dt,$$

где $\frac{\partial u}{\partial t}$ — скорость возрастания температуры. При этом количество тепла, которое необходимо сообщить элементу массы ρhdS, чтобы увеличить его температуру на du, равно

$$dQ = c\rho hdS\frac{\partial u}{\partial t}dt. \tag{3.2}$$

Приравнивая соотношения (3.1) и (3.2), получаем:

$$kh\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dSdt = c\rho h\frac{\partial u}{\partial t}dSdt.$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Введем *оператор Лапласа* (или *лапласиан*) Δ, полагая

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{3.3}$$

Обозначая $\frac{k}{c\rho} = a^2$, получаем тогда уравнение теплопроводности для однородной пластинки в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u. \tag{3.4}$$

2. Стационарное распределение температуры в пластинке. Распределение температуры называется *стационарным*, если оно не зависит от времени, т. е. $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Уравнение стационарного распределения температуры получается из уравнения (3.4) и имеет вид

$$\Delta u = 0. \tag{3.5}$$

Это уравнение называется *уравнением Лапласа*.

Функция называется *гармонической* в данной области, если она имеет непрерывные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет уравнению Лапласа во внутренних точках области. (Примеры гармонических функций: $u = ax + by$, $u = x^2 - y^2$.)

Пусть $C^{(2)}$ — класс функций с непрерывными вторыми производными. Тогда, согласно определению, гармоническая в области G функция удовлетворяет двум условиям:

$$1)\ u \in C^{(2)} \text{ в } G; \tag{3.6}$$

$$2)\ \Delta u(P) = 0, \text{ если } P \in G.$$

Всякая гармоническая функция описывает стационарное распределение температуры пластинки.

3. Необходимое условие максимума функции. Пусть в области G задана функция $u(x, y) \in C^{(2)}$. И пусть в точке $P_0(x_0, y_0) \in G$ функция принимает максимальное значение $u(P_0) = \max\limits_G u$.

Тогда для любой точки $P \in G$, находящейся внутри круга радиуса r с центром в точке P_0, справедливо неравенство

$$u(P_0) > u(P), \quad \text{если } 0 < \rho(P_0, P) < \rho, \tag{3.7}$$

где $\rho(P_0, P)$ — расстояние между точками P_0 и P (рис. 9).

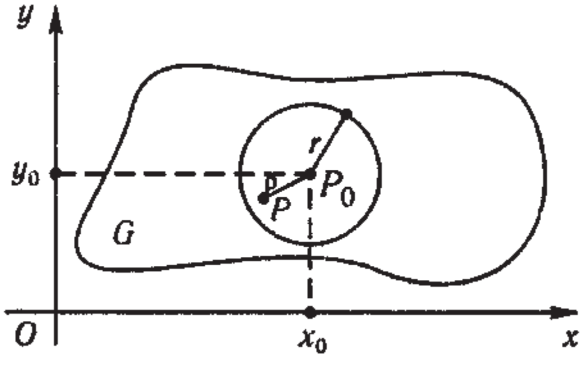

Рис. 9

Докажем следующую теорему.

Теорема. Если функция имеет максимум во внутренней точке области, то в этой точке ее частные производные равны нулю, а лапласиан не больше нуля.

Доказательство. Необходимое условие эустремума функции дает

$$u'_x(P_0) = 0,$$
$$u'_y(P_0) = 0.$$

Так как функция $u(x, y_0)$ имеет максимум при $x = x_0$, то

$$u''_{xx}(P_0) \le 0,$$

Аналогично, так как функция $u(x_0, y)$ максимальна при $y = y_0$, то

$$u''_{yy}(P_0) \le 0,$$

Складывая неравенства, получим

$$\Delta u(P_0) \le 0. \qquad (3.8)$$

Теорема доказана.

4. Принцип максимума для гармонических функций. Рассмотрим ограниченную область G с границей Γ. Пусть функция $u(x, y)$ определена и непрерывна в замкнутой области $\overline{G} = G + \Gamma$ и удовлетворяет уравнению Лапласа внутри $\overline{G}$.

Из курса математического анализа известно, что всякая непрерывная функция в замкнутой ограниченной области достигает своего максимального значения. Для гармонической функции справедлива следующая теорема.

Теорема. Функция, гармоническая внутри ограниченной области G и непрерывная в замкнутой области $\overline{G}$, не может достигать строгого максимума внутри этой области.

Доказательство. Пусть $Q_0 \in \Gamma$ — точка границы Γ, в которой функция $u(x, y)$ принимает максимальное граничное значение. Докажем, что эта функция не может внутри области $\overline{G}$ принимать значения, большие чем в точке $Q_0 \in \Gamma$. Доказательство проведем от противного.

Пусть найдется такая точка $P_0 \in G$, что

$$u(P_0) > u(Q_0), \qquad (3.9)$$

причем $u(P_0)$ — максимальное значение функции u в области G.

Отсюда

$$u(P_0) - u(Q_0) \geq \alpha > 0$$

или

$$u(P_0) \geq u(Q_0) + \alpha. \qquad (3.10)$$

Пусть $P \in G + \Gamma$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$v(P) = u(P) + \varepsilon\rho^2, \qquad (3.11)$$

где $\rho = \rho(P, P_0) = \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right]^{\frac{1}{2}}$, $0 < \varepsilon < +\infty$.

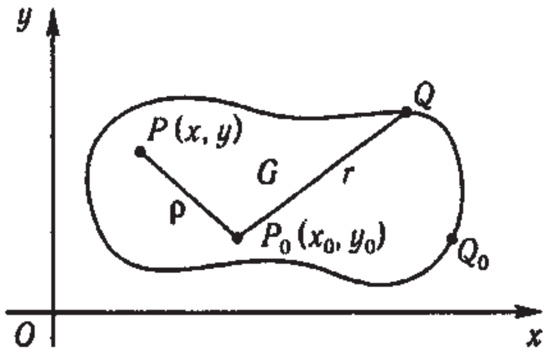

Рис. 10.

Так как функция $u(P)$ достигает своего наибольшего значения во внутренней точке P_0 области $\overline{G}$, то функция $v(P)$ при достаточно малом значении $\varepsilon > 0$ также достигает своего наибольшего значения в некоторой внутренней точке P_0' области $\overline{G}$.

Действительно, при $Q \in \Gamma$ и $r = \rho(Q, P_0)$ имеем

$$v(P_0) = u(P_0) \geq u(Q_0) + \alpha \geq u(Q) + \alpha. \qquad (3.12)$$

Отсюда на основании (3.11) получаем

$$v(P_0) \geq v(Q) - \varepsilon r^2 + \alpha \geq v(Q) + (\alpha - \varepsilon R^2), \qquad (3.13)$$

где $R = \max\limits_{Q \in \Gamma} r$.

Следовательно, выбирая

$$0 < \varepsilon < \frac{\alpha}{R^2},$$

из (3.13) будем иметь

$$v(P_0) > v(Q).$$

Отсюда и подавно

$$v(P_0') \geq v(P_0) > v(Q), \qquad (3.14)$$

причем

$$P_0' \notin \Gamma.$$

Подсчитаем лапласиан Δv в точке P_0'. Из (3.11) имеем

$$v''_{xx}(P_0') = u''_{xx}(P_0') + 2\varepsilon$$

и

$$v''_{yy}(P_0') = u''_{yy}(P_0') + 2\varepsilon.$$

Отсюда

$$\Delta v(P_0') = \Delta u(P_0') + 4\varepsilon = 4\varepsilon > 0,$$

что невозможно в силу теоремы, приведенной в § 3, п. 3. Следовательно, предположение (3.9) неверно.

Теорема доказана.

Следствие 1 (принцип минимума). Функция, гармоническая внутри ограниченной области G и непрерывная в замкнутой области $\overline{G}$, не может достигать строгого минимума внутри области.

Доказательство. Предположим, что гармоническая функция u достигает строгого минимума в некоторой внутренней точке $P_0 \in G$, т. е.

$$u(P_0) = \min_G u.$$

Рассмотрим функцию $v = -u$, которая, равно как и u, непрерывна в $\overline{G}$ и гармоническая в G, так как $\Delta v = -\Delta u = 0$.

Но в точке P_0, где u принимает минимальное значение, функция v имеет максимальное значение

$$v(P_0) = \max_G v.$$

что невозможно в силу принципа максимума. Следствие доказано.

Следствие 2. Значения функции, гармонической внутри ограниченной области G и непрерывной в замкнутой области $\overline{G}$, заключены между наименьшим и наибольшим ее значениями на границе этой области, т. е.

$$\underline{u} \le u(P) \le \overline{u}, \tag{3.15}$$

где: $\underline{u} = \min\limits_{\Gamma} u, \quad \overline{u} = \max\limits_{\Gamma} u, \quad P \in \overline{G}.$

Замечание. Функция, гармоническая внутри ограниченной области G, непрерывная в замкнутой области $\overline{G}$ и отличная от постоянной, достигает свои наибольшее и наименьшее значения лишь на границе области.

5. Задача Дирихле. Пусть G — конечная область, ограниченная замкнутым контуром Γ, на котором задана непрерывная функция $f(Q)$.

Требуется найти функцию $u(P)$ гармоническую внутри области G, непрерывную в замкнутой области $\overline{G} = G + \Gamma$ и принимающую заданные значения f на границе Γ, т. е.

$$1)\ \Delta u(P) = 0,\quad P \in G;$$

$$2)\ u|_\Gamma = f(Q),\quad Q \in \Gamma.$$

Эта краевая задача носит название *задачи Дирихле.*

Примером задачи Дирихле может служить следующая: зная распределение температуры на границе пластинки, найти стационарное распределение температуры по пластинке.

6. Корректность задачи Дирихле. Докажем теорему единственности.

Теорема 1. Для ограниченной замкнутой области задача Дирихле имеет единственное решение.

Доказательство. Предположим противное, т. е. что задача имеет два решения:

функцию u_1, для которой

$$\begin{cases} \Delta u_1(P) = 0, & P \in G, \\ u_1(Q) = f(Q), & Q \in \Gamma, \end{cases}$$

и функцию u_2, для которой

$$\begin{cases} \Delta u_2(P) = 0, & P \in G, \\ u_2(Q) = f(Q), & Q \in \Gamma. \end{cases}$$

Рассмотрим разность $u = u_1 - u_2$. Она обладает следующими свойствами:

1) $\Delta u(P) = 0, P \in G$;

2) u непрерывна в замкнутой области $\overline{G} = G + \Gamma$;

3) $u|_\Gamma = f(Q) - f(Q) = 0$.

Следовательно, $\underline{u} = \min\limits_\Gamma u = 0,\ \ \overline{u} = \max\limits_\Gamma u = 0.$

В силу формулы (3.15) имеем

$$0 = \underline{u} \le u(P) \le \overline{u} = 0,$$

откуда

$$u(P) \equiv 0,\quad \text{т. е. } u_1 \equiv u_2.$$

Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е. Область называется *выпуклой*, если любые две ее точки можно соединить отрезком, принадлежащим этой области.

Т е о р е м а 2. Для ограниченной выпуклой области задача Дирихле имеет решение и это решение единственное (без доказательства).

Для доказательства корректности задачи Дирихле достаточно показать, что ее решение непрерывно зависит от граничных данных.

Т е о р е м а 3. Решение задачи Дирихле для замкнутой и ограниченной области (в частности, выпуклой) непрерывно зависит от граничных данных.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что

$$u_1(x, y) \text{ и } u_2(x, y)$$

— решения задачи Дирихле, соответственно принимающие на границе значения

$$f_1(x, y) \text{ и } f_2(x, y).$$

Пусть всюду на границе Г выполнено неравенство

$$|f_1(x, y) - f_2(x, y)| < \varepsilon,$$

где ε — произвольно малое положительное число.

Рассмотрим гармоническую функцию

$$u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y).$$

На границе Г эта функция принимает значение

$$f(x, y) = f_1(x, y) - f_2(x, y).$$

Так как $-\varepsilon < f(x, y) < \varepsilon$ на Г, то в силу принципа максимума имеем

$$-\varepsilon < u(x, y) < \varepsilon \quad \text{при } (x, y) \in G,$$

т. е.

$$-\varepsilon < u_1(x, y) - u_2(x, y) < \varepsilon$$

или

$$|u_1(x, y) - u_2(x, y)| < \varepsilon.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое δ (а именно: $\delta = \varepsilon > 0$), что при изменении граничных значений меньше, чем на δ, решение в области G изменяется меньше, чем на ε.

Из теорем 1–3 следует корректность задачи Дирихле для ограниченной выпуклой области.

7. Оператор Лапласа в полярных координатах. Запишем оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

в полярных координатах (r, φ), $(r \geq 0,\ -\pi < \varphi < \pi)$, которые, как известно, связаны с декартовыми координатами следующими соотношениями (см. рис. 11):

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2}, \\ \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \end{aligned}\right\}^{*}$$

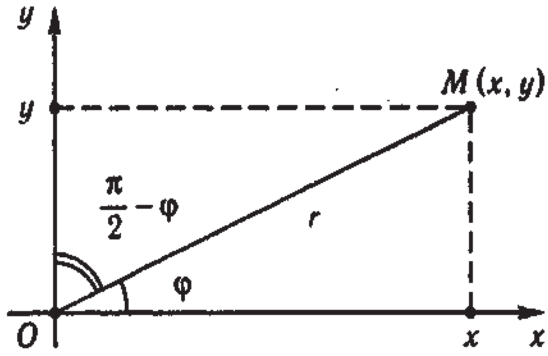

Рис. 11

Вычислим производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{(-y/x^2)}{1+y^2/x^2} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right)\cos\varphi -$$

$$- \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right)\frac{\sin\varphi}{r} = \tag{3.16}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos\varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r^2}\right)\cos\varphi -$$

$$- \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \varphi}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\frac{\sin\varphi}{r} - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)\frac{\sin\varphi}{r} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\varphi - 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2\varphi}{r} + 2\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}.$$

Для нахождения $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ заменим в формуле (3.16) φ на $\frac{\pi}{2}-\varphi$ и $\partial\varphi$ на $-\partial\varphi$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\varphi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi\,\partial r}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r} + \\ &+ \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\frac{\cos^2\varphi}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\varphi}{r} - 2\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

---

* Точнее, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, если $x > 0$; $\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, если $x < 0, y \geq 0$; $\varphi = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, если $x < 0$, $y \leq 0$. Во всех случаях $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$.

Складывая выражения (3.16) и (3.17), получим

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\frac{1}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{r}. \qquad (3.18)$$

Итак, оператор Лапласа в полярных координатах определяется видом

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}.$$

8. Фундаментальное решение уравнения Лапласа в полярных координатах. Найдем решение уравнения Лапласа в полярных координатах, зависящее только от одной переменной r и не зависящее от φ. Согласно формуле (3.18), оно будет определяться тогда из *обыкновенного* дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du(r)}{dr} = 0$$

и, как легко убедиться, равно

$$u(r) = C_1 \ln r + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Полагая $C_1 = -1$, $C_2 = 0$, получим

$$u_0 = \ln\frac{1}{r}.$$

Функция $u_0(r)$ удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ всюду, кроме точки $r = 0$, где она обращается в бесконечность. Эту функцию называют *фундаментальным решением* уравнения Лапласа на плоскости.

9. Гармонические полиномы. Полиномы, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются *гармоническими*.

Рассмотрим однородный полином степени n

$$P_n(x, y) = \sum_{\alpha+\beta=n} C_{\alpha,\beta}\, x^\alpha y^\beta. \qquad (3.19)$$

Переходя к полярным координатам по формулам

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

получим

$$P_n = r^n \sum_{\alpha+\beta=n} C_{\alpha,\beta} \cos^\alpha\varphi \sin^\beta\varphi = r^n \Phi_n(\varphi).$$

Следовательно, всякий однородный полином можно представить в виде

$$P_n = r^n \Phi_n(\varphi), \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{3.20}$$

Для гармонических однородных полиномов, кроме того,

$$\Delta P_n = 0$$

или в полярных координатах, согласно формуле (3.18),

$$\frac{\partial^2 P_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P_n}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P_n}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{3.21}$$

Подставляя (3.20) в (3.21), получим

$$n(n-1)r^{n-2}\Phi_n(\varphi) + nr^{n-2}\Phi_n(\varphi) + r^{n-2}\Phi_n''(\varphi) = 0.$$

Отсюда следует, что функция $\Phi_n(\varphi)$ определяется из уравнения

$$\Phi_n''(\varphi) + n^2\Phi_n(\varphi) = 0$$

и равна

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi,$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные.

Итак, однородные гармонические полиномы степени n в полярных координатах имеют вид

$$P_n = r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{3.22}$$

Перейдем к декартовым координатам. Воспользовавшись формулой Муавра

$$(x + iy)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

получим

$$r^n\cos n\varphi = \mathrm{Re}(x + iy)^n, \quad r^n\sin n\varphi = \mathrm{Im}(x + iy)^n.$$

Следовательно, однородные гармонические полиномы степени n в декартовых координатах могут быть представлены в виде

$$P_n(x, y) = A_n\mathrm{Re}(x + iy)^n + B_n\mathrm{Im}(x + iy)^n. \tag{3.23}$$

Например, построим однородные гармонические полиномы третьей степени $P_3(x, y)$. Имеем

$$(x + iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3.$$

Отсюда имеем

$$\mathrm{Re}(x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2, \quad \mathrm{Im}(x+iy)^3 = 3x^2y - y^3$$

и

$$P_3(x, y) = A_3(x^3 - 3xy^2) + B_3(3x^2y - y^3).$$

10. Решение задачи Дирихле для круга. Пусть дан круг радиуса R с центром в начале координат. Решим задачу Дирихле для круга: найти функцию $u(r, \varphi)$ гармоническую внутри круга и принимающую на его границе Γ заданные непрерывные значения, т. е.

$$1)\ \Delta u(r, \varphi) = 0 \quad (0 < r < R); \tag{3.24}$$

$$2)\ u(R, \psi) = \lim_{\substack{r \to R-0, \\ \varphi \to \psi}} u(r, \varphi) = f(\psi), \tag{3.25}$$

где $f(\psi)$ — заданная непрерывная функция (рис. 12)

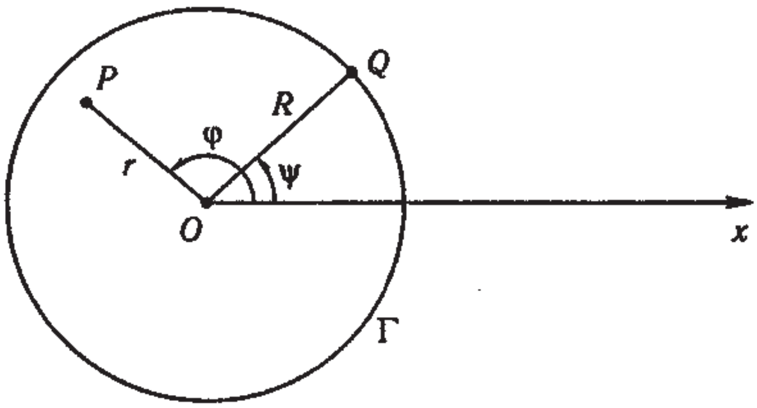

Рис. 12

Функцию $u(r, \varphi)$, представляющую решение данной задачи Дирихле, ищем в виде ряда гармонических полиномов

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \tag{3.26}$$

Таким образом, $\Delta u = 0$.

Выберем коэффициенты A_n и B_n такими, чтобы эта функция удовлетворяла также заданному граничному условию. Пусть $r = R$, $\varphi = \psi$. Тогда граничное условие (3.25) дает

$$f(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n (A_n \cos n\psi + B_n \sin n\psi). \tag{3.27}$$

Напишем разложение функции $f(\psi)$, период которой $T = 2\pi$, в ряд Фурье:

$$f(\psi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\psi + b_n \sin n\psi) \tag{3.28}$$

с коэффициентами, определяемыми по формуле (2.6)(см. гл. II, § 2)

$$\left.\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\begin{cases}\cos n\psi \\ \sin n\psi\end{cases} d\psi. \tag{3.29}$$

Ряды (3.27) и (3.28) должны быть тождественны. Поэтому, сравнивая их, получаем

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_n = \frac{a_n}{R^n}, \quad B_n = \frac{b_n}{R^n}. \tag{3.30}$$

Итак, мы построили формальное решение задачи Дирихле для круга в виде ряда (3.26) с коэффициентами (3.30). Чтобы убедиться в том, что функция $u(r, \varphi)$, определяемая этим рядом, действительно является решением исходной задачи, надо доказать сходимость ряда, возможность его почленного дифференцирования, а также доказать непрерывность этой функции (изнутри) в точках границы круга.

11. Геометрическая прогрессия в комплексной области. Рассмотрим бесконечно убывающую геометрическую прогрессию

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1. \tag{3.31}$$

Пусть q — комплексно и представлено в тригонометрической форме

$$q = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $\rho = |q|$ и $\varphi = \arg q$.

Тогда по формуле Муавра имеем

$$q^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

и равенство (3.31) может быть записано в следующем виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \frac{1}{1 - \rho\cos\varphi - i\rho\sin\varphi} = \frac{1 - \rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi}{1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2}.$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\cos n\varphi=\frac{1-\rho\cos\varphi}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2},\tag{3.32}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\sin n\varphi=\frac{\rho\sin\varphi}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2},\tag{3.33}$$

где $|\rho|<1$. Эти формулы мы используем ниже.

12. Интеграл Пуассона. Решение задачи Дирихле для круга, как было показано выше, дается в виде ряда (3.26) с коэффициентами, определяемыми по формулам (3.30) и (3.29). Пуассон нашел сумму ряда (3.26) в конечном виде.

Подставляя выражение коэффициентов в (3.26) и меняя порядок суммирования и интегрирования, будем иметь

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\psi)d\psi+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\left\{\cos n\varphi\int_{-\pi}^{\pi}f(\psi)\cos n\psi d\psi+\right.$$

$$\left.+\sin n\varphi\int_{-\pi}^{\pi}f(\psi)\sin n\psi d\psi\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\psi)d\psi+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\int_{-\pi}^{\pi}f(\psi)\cos n(\psi-\varphi)d\psi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\psi)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(\psi-\varphi)\right]d\psi,\quad \frac{r}{R}<1.$$

Воспользуемся формулой (3.32)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\cos n\varphi=1+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\cos n\varphi=\frac{1-\rho\cos\varphi}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2},\quad |\rho|<1,$$

полагая $\rho=\frac{r}{R}$. Тогда выражение, стоящее в квадратных скобках, преобразуется следующим образом:

$$\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(\psi-\varphi)\right]=\frac{1-\frac{r}{R}\cos(\psi-\varphi)}{1-2\frac{r}{R}\cos(\psi-\varphi)+\frac{r^2}{R^2}}-\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{R^2-r^2}{2\left[R^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)+r^2\right]}.$$

Поэтому окончательно получаем:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2}f(\psi)d\psi. \qquad (3.34)$$

Эта формула называется интегралом Пуассона.

13. Теорема о среднем для гармонических функций.

Теорема. Значение гармонической функции в центре круга равно среднему арифметическому ее значений на окружности L этого круга.

Доказательство. Применяя формулу (3.34), полагая $r = 0$ и $f(\psi) = u(R, \psi)$, получаем:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(R, \psi)d\psi,$$

или, переходя к интегрированию по дуге окружности

$$dl = Rd\psi,$$

будем иметь

$$u(0) = \frac{1}{2\pi R}\oint_L u(Q)dl, \quad (Q \in L), \qquad (3.35)$$

что и требовалось доказать.

14. Приближенное решение задачи Дирихле методом сеток. В тех случаях, когда не удается получить аналитического решения задачи, применяют приближенные методы. Эти методы наиболее широкое распространение получили в связи с бурным развитием вычислительной техники.

Для численного решения задачи Дирихле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } (x, y) \in G \qquad (3.36)$$

и

$$u|_{\Gamma} = f(Q) \quad \text{при } Q \in \Gamma,$$

где $f(Q)$ — заданная непрерывная функция, часто применяют метод сеток. Идея этого метода состоит в следующем:

1) заданная область G, в которой ищется решение, заменяется сетчатой областью G_h, аппроксимирующей область G;

2) дифференциальное уравнение Лапласа заменяется разностным;

3) из граничного условия устанавливаются значения искомого решения в граничных узлах области G_h, образующих ее границу Γ_h.

При грубой аппроксимации значение искомой функции u в граничных узлах сетки G_h, считают равными значению этой функции в ближайших точках границы Г, где функция u задана.

Найдя решение разностного уравнения, для чего, вообще говоря, нужно решить алгебраическую систему с большим числом неизвестных, мы получим значения искомой функции в узлах сетки, т. е. будем иметь численное решение нашей задачи.

Для простоты рассмотрим случай квадратной сетки. Выбрав шаг h, построим систему узлов (рис. 13)

$$x_i = x_0 + ih, \quad y_j = y_0 + jh, \quad (i,\ j = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Значение искомой функции $u = u(x, y)$ в точках (x_i, y_j), обозначим через

$$u_{ij} = u(x_i, y_j).$$

Заменим производные их разностными отношениями:

$$u'_x(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i+1,\,j} - u_{i,\,j}}{h};$$

$$u'_y(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i,\,j+1} - u_{i,\,j}}{h};$$

$$u''_{xx}(x_i, y_j) \approx \left(\frac{u_{i+1,\,j} - u_{i,\,j}}{h} - \frac{u_{i,\,j} - u_{i-1,\,j}}{h}\right) : h \approx \frac{u_{i+1,\,j} - 2u_{i,\,j} + u_{i-1,\,j}}{h^2};$$

$$u''_{yy}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i,\,j+1} - 2u_{i,\,j} + u_{i,\,j-1}}{h^2}.$$

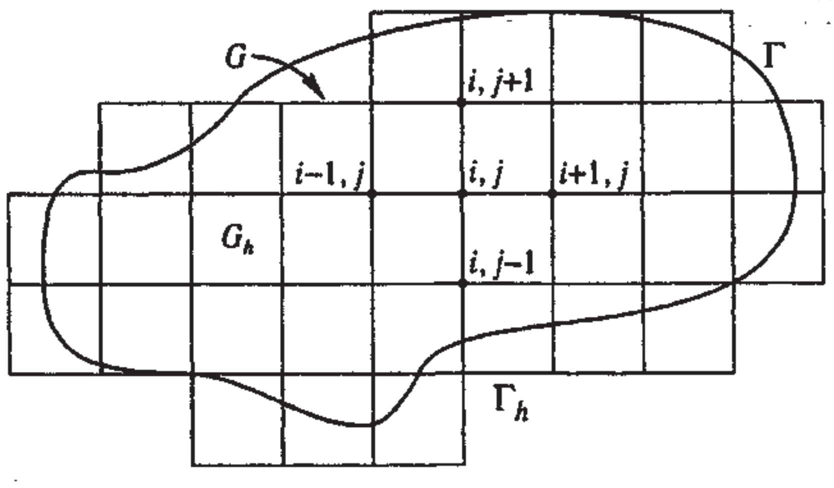

Рис. 13

Дифференциальное уравнение Лапласа тогда заменится разностным:

$$\frac{u_{i-1,\,j} - 2u_{i,\,j} + u_{i+1,\,j} + u_{i,\,j-1} - 2u_{i,\,j} + u_{i,\,j+1}}{h^2} = 0$$

или

$$u_{ij} = \frac{1}{4}\left(u_{i-1,\,j} + u_{i+1,\,j} + u_{i,\,j-1} + u_{i,\,j+1}\right), \qquad (3.37)$$

где $x_{i\,\pm\,1}$, $y_{j\,\pm\,1}$ — расчетные точки.

В узловых точках Γ_h граничную функцию f_h полагаем равной значению функции f в ближайших точках границы Γ.

Итак, мы приходим к следующем задаче: найти функцию, удовлетворяющую в узловых точках внутри G_h разностному уравнению Лапласа (3.37) и принимающую на Γ_h значения, равные f_h.

Для определения решения в каждой внутренней точке сетки необходимо решить неоднородную линейную систему алгебраических уравнений (3.37). Число неизвестных (т. е. число внутренних узлов сетки) равно числу уравнений.

Покажем, что система (3.37) всегда совместна и имеет единственное решение. Будем опираться на следующую теорему: линейная неоднородная система совместна и имеет единственное решение тогда и только тогда, когда соответствующая линейная однородная система имеет только нулевое решение.

Рассмотрим однородную систему

$$\tilde{u}_{ij} = \frac{1}{4}\left(\tilde{u}_{i-1,\,j} + \tilde{u}_{i+1,\,j} + \tilde{u}_{i,\,j-1} + \tilde{u}_{i,\,j+1}\right), \qquad (3.38)$$

где

$$\tilde{u}_{i,\,j} = 0 \qquad (3.39)$$

для точек $(x_i, y_j) \in \Gamma_h$.

Пусть система (3.38) имеет некоторое решение $\tilde{u}_{i,\,j}$. Обозначим через $\tilde{u}_{p,\,q}$ — максимальную компоненту этого решения, т. е.

$$\tilde{u}_{i,\,j} \le \tilde{u}_{p,\,q} \quad \forall (i, j). \qquad (3.40)$$

Из уравнения (3.38) получаем

$$\begin{aligned}&(\tilde{u}_{p,\,q} - \tilde{u}_{p-1,\,q}) + (\tilde{u}_{p,\,q} - \tilde{u}_{p+1,\,q}) + \\ &+ (\tilde{u}_{p,\,q} - \tilde{u}_{p,\,q-1}) + (\tilde{u}_{p,\,q} - \tilde{u}_{p,\,q+1}) = 0.\end{aligned} \qquad (3.41)$$

Так как все скобки в равенстве (3.41) неотрицательны, то отсюда выводим

$$\tilde{u}_{p,\,q} = \tilde{u}_{p-1,\,q} = \tilde{u}_{p+1,\,q} = \tilde{u}_{p,\,q-1} = \tilde{u}_{p,\,q+1}. \qquad (3.42)$$

Таким образом, при изменении на единицу одного из индексов p или q решения $\bar{u}_{p,q}$ выполняется равенство (3.42). Повторяя это рассуждение достаточное число раз, мы через конечное число шагов достигнем точки границы $\bar{u}_{s,t} \in \Gamma_h$, причем

$$\bar{u}_{p,q} = \bar{u}_{s,t} = 0,$$

т. е.

$$\max_{i,j} \bar{u}_{i,j} = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\min_{i,j} \bar{u}_{i,j} = 0.$$

Следовательно,

$$\bar{u}_{p,q} \equiv 0,$$

а значит, система (3.37) совместна и имеет единственное решение.

Задача. Методом сеток приближенно решить задачу Дирихле для квадрата $G = \{0 < x < 3;\ 0 < y < 3\}$ при заданных граничных условиях

$$u|_{\Gamma} = x^2 + y^2.$$

Решение. Выбираем шаг $h = 1$. В узлах сетки проставляем значения искомой функции u (см. рис. 14). На основании схемы (3.37) составляем систему уравнений

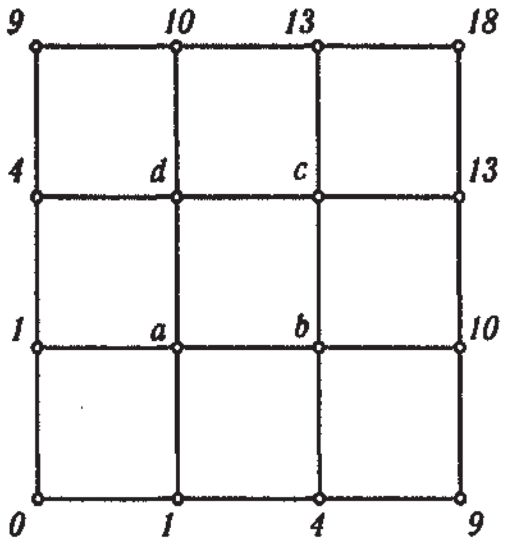

Рис. 14

$$\left.\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{4}(1 + b + d + 1), \\ b &= \tfrac{1}{4}(4 + 10 + c + a), \\ c &= \tfrac{1}{4}(b + 13 + 13 + d), \\ d &= \tfrac{1}{4}(a + c + 10 + 4) \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} 4a - b - d &= 2, \\ -a + 4b - c &= 14, \\ -b + 4c - d &= 26, \\ -a - c + 4d &= 14. \end{aligned}\right\} \qquad (3.43)$$

Из второго и четвертого уравнений получаем $b = d$.

Следовательно, из (3.43) получим систему

$$\left.\begin{aligned} 4a - 2b &= 2,\\ -a + 4b - c &= 14,\\ -2b + 4c &= 26. \end{aligned}\right\} \qquad (3.44)$$

Решая систему (3.44), будем иметь $a = 4,\ b = 7,\ c = 10,\ d = 7$.

Следовательно, решение этой задачи можно записать в виде таблицы:

$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	4	9
1	1	4	7	10
2	4	7	10	13
3	9	10	13	18

Для контроля заметим, что для функции u соблюдены принцип минимума и принцип максимума.

Пример 1. Решить задачу Коши для уравнения колебаний неограниченной струны:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty,\ t > 0,\\ u(x,0) = x^2,\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся формулой Даламбера (1.14). Имеем: $a = 1$, $\varphi(z) = z^2$, $\psi(z) = z$. Следовательно,

$$u(x,t) = \frac{(x+t)^2 + (x-t)^2}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} z\,dz = x^2 + t^2 + xt.$$

Пример 2. Построить профиль бесконечной струны для моментов времени: $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{\alpha}{2a}$, $t_2 = \frac{\alpha}{a}$, если

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{вне } (-\alpha,\alpha);\\ x + h, & -\alpha \le x \le 0,\\ -x + h, & 0 \le x \le \alpha. \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) = 0;$$

Решение. По формуле Даламбера:

$$u(x,t_0)=\frac{\varphi(x)}{2}+\frac{\varphi(x)}{2},$$

$$u(x,t_1)=\frac{\varphi(x+\frac{\alpha}{2})}{2}+\frac{\varphi(x-\frac{\alpha}{2})}{2},$$

$$u(x,t_2)=\frac{\varphi(x+\alpha)}{2}+\frac{\varphi(x-\alpha)}{2}.$$

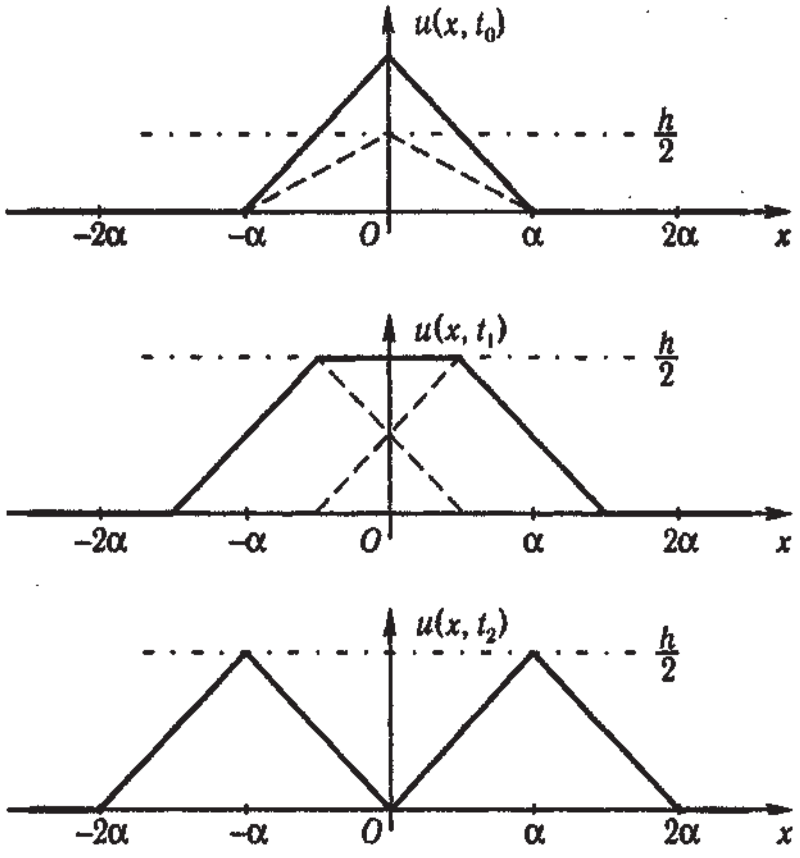

Рис. 15

Функция $u(x,t)$, представляющая распространение начального отклонения $\varphi(x)$ при нулевой начальной скорости $\psi(x)=0$, дается в силу формулы Даламбера:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{\varphi(x-at)}{2}.$$

в виде суммы двух волн, распространяющихся направо и налево со скоростью a, причем начальная форма обеих волн определяется функцией $\frac{\varphi(x)}{2}$, равной половине начального отклонения.

Пример 3. Построить профиль бесконечной струны, если начальное отклонение ее равно нулю, а начальная скорость отлична от нуля только на отрезке $[x_1, x_2]$, где принимает постоянное значение:

$$u(x,0)=\varphi(x)=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x)=\begin{cases}\psi_0, & \text{если } x_1\le x\le x_2,\\ 0 & \text{вне } [x_1,x_2],\end{cases}$$

для моментов времени

$$t_0=0,\ t_1=\frac{1}{4a}(x_2-x_1),\ t_2=\frac{1}{2a}(x_2-x_1).$$

Решение. В этом случае формула Даламбера принимает вид

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz=\Psi(x+at)-\Psi(x-at),$$

т. е. и в этом случае функция $u(x,\ t)$ дается в виде двух волн, причем $\Psi(x)$ является интегралом от $\psi(z)$ и представляет профиль волны, идущей налево:

$$\Psi(x)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x}\psi(z)dz.$$

Нам будет удобно выбрать $x_0=x_1$. Вспомогательная функция имеет вид (рис. 16):

$$\Psi(x)=\begin{cases}0, & x\le x_1,\\ \frac{1}{2a}(x-x_1)\psi_0, & x_1\le x\le x_2,\\ \frac{1}{2a}(x_2-x_1)\psi_0, & x\ge x_2.\end{cases}$$

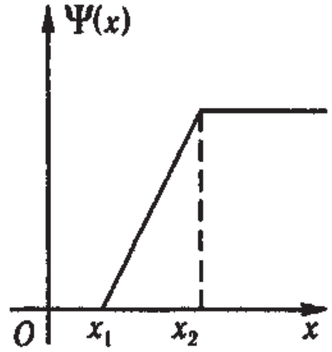

Рис. 16

Для получения функции $u(x,\ t)$ мы должны взять разность левой и правой волн, определяемых функцией $\Psi(x)$.

Изобразим последовательные положения этих волн и их разности в различные моменты времени t (рис. 17):

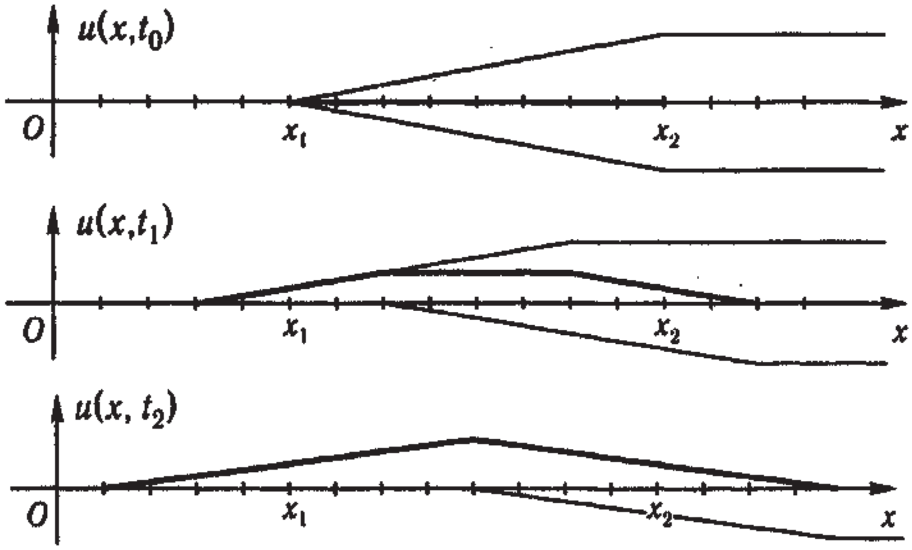

Рис. 17

Пример 4. Построить профиль струны $u(x, t)$ с закрепленным концом $u(0, t) = 0$ для моментов $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{l}{a}$, если $0 < x < +\infty$ и

$$u(x,0) = \begin{cases} Ax(l - x), & 0 \le x \le l, \\ 0, & x > l; \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \ x > 0.$$

Решение. Решение этой задачи будет получено, если начальные данные нечетно продолжить на бесконечную прямую (рис. 18).

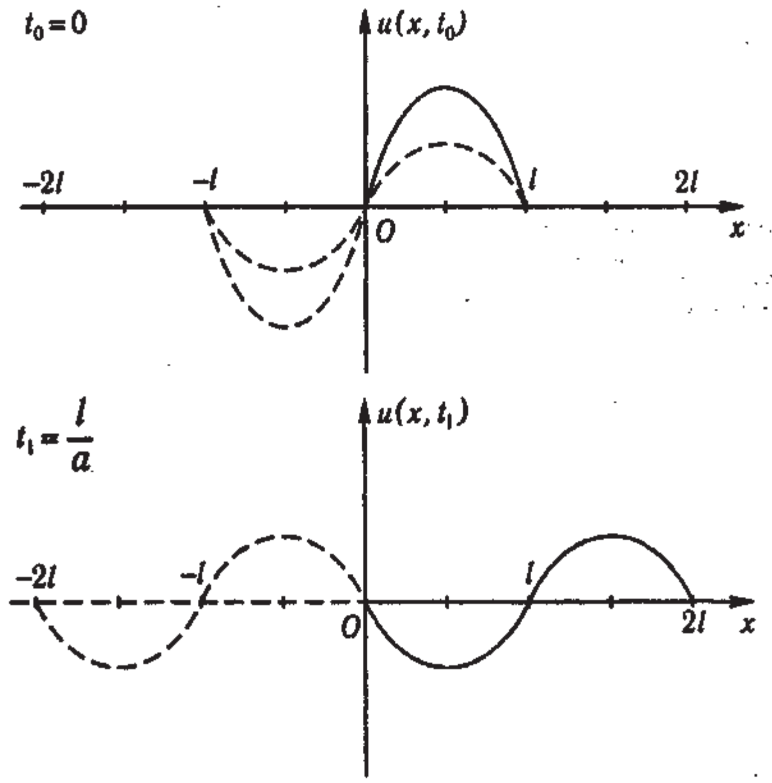

Рис. 18

Пример 5. Найти продольное смещение $u(x, t)$ точек стержня длиной l, жестко закрепленного с обоих концов, если начальное смещение

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x \le \frac{l}{2}, \\ 2(l-x), & \frac{l}{2} < x \le l, \end{cases}$$

а начальные скорости равны нулю.

Решение. Это — первая краевая задача для уравнения колебаний:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \equiv 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases}$$

Ее решение представляется в виде ряда Фурье (1.31) с коэффициентами A_n и B_n, вычисляемыми по формулам (1.34):

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_0^{l/2} 2x\sin\frac{n\pi x}{l}dx +$$

$$+\frac{2}{l}\int_{l/2}^{l} 2(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{8l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}, \quad B_n = 0.$$

Следовательно,

$$u(x,t) = \frac{8l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi a t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Задания для самостоятельного решения.

1. Решить задачу Коши для уравнения колебаний неограниченной струны:

а) $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = \sin x, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = A\sin x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = e^x. \end{cases}$

2. Построить профиль бесконечной струны для моментов времени $t_0 = 0,\ t_1 = \frac{l}{2a},\ t_2 = \frac{l}{a}$, если

$$u(x,0) = \begin{cases} A\cos\frac{\pi x}{2l}, & |x| < l, \\ 0, & |x| > l; \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

3. Построить профиль бесконечной струны для моментов времени $t_0 = 0,\ t_1 = \frac{1}{4a},\ t_2 = \frac{2}{4a},\ t_3 = \frac{3}{4a},\ t_4 = \frac{4}{4a}$, если

$$u(x,0) = \begin{cases} 1-|x|, & \text{при } |x| \le 1, \\ 0, & \text{при } |x| > 1; \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

4. Построить профиль струны $u(x,\ t)$ с закрепленным концом:

$$u(0,\ t) = 0 \quad (0 \le x < +\infty)$$

для моментов времени $t_0 = 0,\ t_1 = \frac{C}{a},\ t_2 = \frac{3C}{2a},\ t_3 = \frac{2C}{a}$, если начальные скорости отсутствуют, а начальное отклонение имеет вид, изображенный на рис. 19.

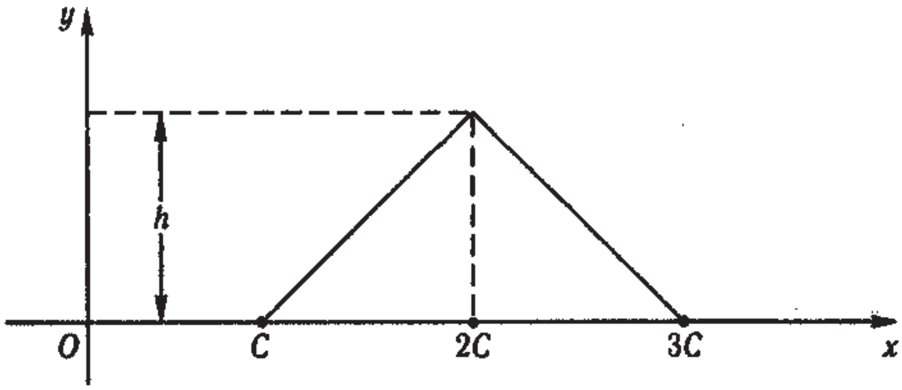

Рис. 19

5. Построить профиль струны $u(x,\ t)$ с закрепленным концом $u(0,\ t) = 0$ для моментов времени $t = 0,\ t = \frac{l}{a}$, если $0 \le x < +\infty$, а

$$u(x,0) = \begin{cases} A\sin\frac{\pi x}{l}, & 0 < x \le l, \\ 0, & x > l; \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

6. Найти профиль полубесконечной струны $u(x,\ t)$ с закрепленным концом $u(0,\ t) = 0$ для моментов времени $t_0 = 0, t_1 = \frac{l}{2a}, t_2 = \frac{l}{a} t_3 = \frac{2l}{a}$, если

$$u(x,0) = \begin{cases} A\cos\frac{\pi(l-x)}{2l}, & x \le l, \\ 0, & x > l; \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad (0 \le x < +\infty).$$

7. Полуограниченная однородная струна с закрепленным концом $x = 0$ возбуждена начальным отклонением

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < l, \\ -\sin\frac{\pi x}{l}, & l \le x < 2l, \\ 0, & 2l \le x < +\infty. \end{cases}$$

Определить графически форму струны в моменты времени

$$t_1 = \frac{l}{4a},\ t_2 = \frac{l}{a},\ t_3 = \frac{3l}{2a}.$$

8. Для полуограниченной струны с закрепленным концом $x = 0$ в начальный момент времени выполнены следующие соотношения:

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < c, \\ \frac{h}{c}(x-c), & c \le x \le 2c, \\ -\frac{h}{c}(x-3c), & 2c \le x \le 3c \\ 0, & x \ge 3c; \end{cases} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad (h > 0,\ c > 0).$$

Начертить профиль струны в моменты времени

$$t_1 = \frac{c}{a},\ t_2 = \frac{2c}{a},\ t_3 = \frac{3c}{a},\ t_4 = \frac{7c}{2a}.$$

(a — скорость распространения колебаний по струне).

9. Найти закон колебания однородной струны длины $l = \pi$ с закрепленными концами, если начальное отклонение $\varphi(x) = \sin x$, а начальная скорость равна нулю.

10. Заключенный в цилиндрической трубке идеальный газ совершает малые колебания, причем плоские поперечные сечения, состоящие из частиц газа, не деформируются и все частицы газа двигаются параллельно оси цилиндра, а концы трубки закрыты жесткими непроницаемыми перегородками.

Найти смещение $u(x, t)$ частиц газа при $t > 0$, если начальное смещение имеет вид

$$u(x,0) = A\sin\frac{\pi x}{l} \quad (0 \le x \le l),$$

а начальные скорости равны

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = B\sin\frac{\pi x}{l} \quad (0 \le x \le l).$$

11. Методом Фурье решить первую краевую задачу для уравнений колебаний:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ 0 < x < l, \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \end{cases}$$

если:

а) $\varphi(x) = 0, \ \psi(x) = \sin\frac{\pi x}{l}$;

б) $\varphi(x) = 0, \ \psi(x) = 1$.

12. Однородная струна, закрепленная на концах $x = 0$ и $x = l$, имеет в начальный момент времени форму параболы, симметричной относительно перпендикуляра, проведенного через точку $x = \frac{l}{2}$. Определить смещение точек струны от прямолинейного положения равновесия, предполагая, что начальные скорости отсутствуют.

Указание. Начальное отклонение точек струны равно

$$\varphi(x) = \frac{4hx(l-x)}{l^2}, \text{ где } h = u\left(\frac{l}{2}, 0\right).$$

13. Концы струны $x = 0$ и $x = l$ закреплены. Начальное отклонение задано равенством

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{h}{x_0}x, & \text{при } 0 \le x \le x_0, \\ \frac{h(x-l)}{x_0 - l}, & \text{при } x_0 \le x \le l. \end{cases}$$

Начальные скорости равны нулю. Найти отклонение $u(x, t)$ при $t > 0$.

14. Продольные колебания стержня длины l, у которого один конец (при $x = 0$) закреплен, а другой (при $x = l$) свободен, определяются уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $u(x, t)$ — продольное смещение точки стержня с абсциссой x в момент времени t, граничными условиями

$$u\big|_{x=0} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0$$

при любом t и начальными условиями при $t = 0$:

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x).$$

Найти функцию $u(x, t)$, если:

а) $\varphi(x) = kx$, $\psi(x) = 0$;

б) $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = v_0$.

Пример. Трубка длиной l содержит растворенное вещество с начальной концентрацией

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{при } 0 < x \le \frac{l}{2}, \\ l - x, & \text{при } \frac{l}{2} \le x < l. \end{cases}$$

Найти концентрацию $C(x, t)$ вещества при $t > 0$, если на концах трубки она поддерживается равной нулю.

Решение. Мы имеем первую краевую задачу для уравнения диффузии:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t} = \eta \dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ C(x, 0) = \varphi(x), & 0 < x < l, \\ C(0, t) = C(l, t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

где η — коэффициент диффузии.

Решение ее определяется рядом Фурье

$$C(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \eta t} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

с коэффициентами Фурье, вычисленными по формуле:

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^{l/2} x \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx + \frac{2}{l}\int_{l/2}^{l} (l - x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{4l}{\pi^2}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}.$$

Следовательно,

$$C(x, t) = \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{l^2}\eta t} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

15. Дан тонкий однородный стержень длиной l, боковая поверхность которого теплоизолирована. Концы стержня поддерживаются при температуре, равной нулю. Определить температуру стержня в момент времени $t > 0$, если начальная температура равна

$$\varphi(x) = A\sin\frac{2\pi}{l}x.$$

16. Методом Фурье решить краевую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, & 0 < x < \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

17. Решить первую краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 < x < l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

если:

$$\text{а) } \varphi(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right);$$

$$\text{б) } \varphi(x) = \frac{x}{6l} - \frac{x^2}{4l^2} + \frac{x^3}{12l^3}.$$

18. Растворенное вещество с начальной концентрацией $C_0 = \text{const}$ диффундирует из раствора, заключенного между плоскостями $x = 0$ и $x = h$, в растворитель, ограниченный плоскостями $x = h$ и $x = l$, $(l > h)$. Определить концентрацию $C(x, t)$ вещества в момент времени $t > 0$, предполагая, что границы $x = 0$ и $x = l$ непроницаемы для вещества, то есть

$$\left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=l} = 0.$$

19. Решить краевую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 < x < l, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

20. Пусть в пластине, перпендикулярной оси Ox $(0 \le x \le l)$, распространяющейся бесконечно в направлениях Oy и Oz и имеющей начальную температуру $\varphi(x)$, стенки внезапно охладились до температуры окружающей среды u_0.

Найти зависимость $u(x, t)$ между температурой и временем от начала охлаждения для различных точек пластины.

Рассмотреть случай постоянной начальной температуры

$$\varphi(x) = u_1 = \text{const}.$$

21. *Задача о массопроводности*. Пусть сосуд с единичным поперечным сечением и высотою l заполнен раствором соли. Положим, что этот сосуд с содержимым погружен в емкость с большим количеством воды, причем открытый край сосуда находится непосредственно под поверхностью воды. Примем, что верхний край сосуда всегда находится в соприкосновении с чистой водой. Тогда в сосуде будет протекать процесс диффузии соли в соответствии с законом Фурье:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

где $c = c(x, t)$— концентрация соли в растворе;

η — коэффициент диффузии;

t — время;

x — высота слоя раствора в сосуде.

Граничные и начальные условия процесса таковы:

$$\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad c|_{x=l} = 0, \quad c|_{t=0} = c_0.$$

Определить концентрацию соли $c(x, t)$ в зависимости от времени и от высоты слоя жидкости в сосуде.

Найти выражение для концентрации диффундирующего вещества в различных частях сосуда после того, как процесс массопроводности установился.

22. При рассмотрении процесса взаимной диффузии двух газов возникает следующая краевая задача:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \eta \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = 1, & 0 < x < l, \\ u|_{x=0} = 0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0 & t > 0, \end{cases}$$

где функция $u(x, t)$ определяет парциальное давление одного из газов.

Найти решение этой краевой задачи.

Пример. На границе круга $x^2 + y^2 \le R^2$ температура распределяется по закону $u = y^2$. Найти распределение температуры внутри круга, предполагая, что оно стационарно.

Решение. Это задача Дирихле для круга:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u|_\Gamma = y^2, \end{cases}$$

где Γ — окружность $x^2 + y^2 = R^2$. На этой окружности

$$y^2 = f(\psi) = R^2 \sin^2\psi = \frac{R^2}{2}(1 - \cos 2\psi).$$

Решение рассматриваемой задачи представляется рядом (3.26):

$$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

с коэффициентами a_n и b_n, определяемыми по формулам (3.29):

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\cos n\psi d\psi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2}{2}(1-\cos 2\psi)\cos n\psi d\psi, \quad b_n = 0.$$

Следовательно,

$$a_0 = R^2,\ a_n = -\frac{R^2}{2}\delta_{n2},\ b_n = 0,$$

где

$$\delta_{n2} = \begin{cases} 1, & n = 2, \\ 0, & n \ne 2, \end{cases}$$

а значит,

$$u = \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\cos 2\psi = \frac{R^2}{2} - \frac{1}{2}\left(r^2\cos^2\psi - r^2\sin^2\psi\right) = \frac{R^2}{2} - \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right).$$

Пример. Найти значение гармонической функции в центре круга $x^2 + y^2 \le R^2$, если на его границе $u = |x|$.

Решение. Зная значение функции на окружности:

$$u = |x| = R|\cos\psi|$$

и применив теорему о среднем, получим

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R|\cos\psi|d\psi = \frac{R}{\pi}\int_{0}^{\pi}|\cos\psi|d\psi =$$

$$= \frac{R}{\pi}\left\{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi d\psi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\psi d\psi\right\} = \frac{2R}{\pi}.$$

23. Построить все однородные гармонические полиномы, степени которых не выше второй.

24. Решить задачу Дирихле для круга радиуса R с центром в начале координат, если заданы следующие граничные условия:

а) $u|_{r=R} = A$; б) $u|_{r=R} = A\cos\varphi$;

в) $u|_{r=R} = A\sin\varphi$; г) $u|_{r=R} = A + B\sin\varphi$;

д) $u|_{r=R} = A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi$; е) $u|_{r=R} = A\sin^3\varphi + B$,

где A и B — постоянные, (r, φ) — полярные координаты.

25. Найти решение уравнения Лапласа внутри круга радиуса R, если на границе круга заданы условия:

а) $u|_{r=R} = A + By$; б) $u|_{r=R} = Axy$.

26. Найти функцию $u(r, \varphi)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа внутри круга с центром в начале координат и радиуса R, если на границе этого круга

$$u|_{r=R} = \begin{cases} A\sin\varphi, & 0 \le \varphi \le \pi, \\ \frac{1}{3}A\sin^3\varphi, & \pi \le \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

27. Найти функцию $u = u(x, y)$, гармоническую внутри круга

$$x^2 + y^2 \le x + y$$

и принимающую на его границе значения:

а) $u = x$; б) $u = y$.

28. Найти функцию $u = u(x, y)$, гармоническую внутри круга

$$x^2 + y^2 \le 1$$

и принимающую на его границе значение $u = x^3$.

29. Найти значение гармонической функции $u = u(x, y)$ в центре круга $x^2 + y^2 \le 4$, если на его границе она принимает значение

$$u = xy.$$

30. Найти значение гармонической функции $u(x,y)$ в центре круга $x^2 + y^2 \le x$, если на его границе она принимает значение

$$u = x + y.$$

31. Определить стационарное распределение температуры внутри кольца $R_1 < r < R_2$, если на окружности $r = R_1$ поддерживается температура $u = u_1$, а на окружности $r = R_2$ — температура $u = u_2$.

Ответы к заданиям части I

Глава I

§ 2

2. а) $y'=1$; б) $xy'=2y$; в) $y''=2$; г) $y'' = (1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$.

3. а) $y = \frac{3}{4}x^2$; б) $x^2+2y^2=51$; в) $y=xe^x$; г) $y=10e^{-x}\sin x$.

Глава II

§ 3

$y(1)=0{,}95$.

§ 5

1. $y = C\sin x$. **2.** $y = \frac{C+x}{1-Cx}$.

3. $y = -\ln(C-e^x)$ **4.** $y = \left(\frac{x-2}{2}\right)^2$ $(x \geq 2)$ и $y=0$.

§ 6

1. $y^2 = 2x^2 \ln Cx$. **2.** $y = \frac{1}{2C}(x^2 - C^2)$ $(C>0)$.

3. $y=xe^{1+Cx}$.

§ 7

1. $y = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}$. **2.** $y = \frac{x^3}{2} + Cx$.

3. $x = Ce^y - (y^2+2y+2)$. **4.** $I = \frac{V}{R} + \left(I_0 - \frac{V}{R}\right)e^{-\frac{Rt}{L}}$.

§ 8

1. $y^3 = Ce^{-\frac{3}{2}x^2} - \left(x^2 + \frac{2}{3}\right)$. **2.** $y = \left(\frac{1}{3}x^2 + \sqrt{Cx}\right)^2$; $y=0$

3. $\frac{1}{x} = Ce^{\frac{y^2}{2}} - (y^2+2)$.

§ 9.

1. $\frac{x^3}{3} - x^2 y - \frac{y^5}{5} = C.$ 2. $\sqrt{x^2 + y^2} - x = C.$

§ 15.

1. $y = Cx + \cos C;\ \ x = \sin p,\ \ y = p\sin p + \cos p.$

2. $y = Cx - C^2 + C^3;\ \ x = 2p - 3p^2,\ \ y = p^2 - 2p^3.$

3. $y = Cx - \frac{C^2}{2} - \frac{1}{3C};\ \ x = p - \frac{1}{3p^2},\ \ y = \frac{p^2}{2} - \frac{2}{3p}.$

4. $y = Cx + C^2,\ \ y = -\frac{x^2}{4}.$

§ 16

$O(0, 0);\quad A(1, 1);\quad B(3, -3).$

§ 17

1. $y = \left(\frac{x - C}{2}\right)$ (семейство парабол), особое решение $y = 0$;

2. $y = Cx + \frac{1}{C}$ (семейство прямых), особое решение — парабола $y^2 = 4x$;

3. $y^2(1 - y) = (x - C)^2$, особое решение $y = 1$.

§ 19

1. $y = e^{\frac{x}{a}}.$

2. Парабола $y^2 = 2a(x - C)$.

3. Логарифмическая спираль $r = Ce^{\varphi \operatorname{ctg} \alpha}$ (r и φ — полярные координаты).

4. Парабола $(x - y)^2 = Cy$.

5. $y^2 = x^2 \ln\frac{C^2}{x^2}.$

6. Гиперболы $x^2 - y^2 = C$.

§ 20

1. 60 мин. 2. 35,2 сек.

Глава III

§ 3

1. $y = C_1 + C_2x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}\cos 2x.$

2. $y = \left(1 + \frac{3}{2}x\right)^{\frac{2}{3}}.$

3. $y = \pm\frac{2}{3}(x + C_1)^{\frac{3}{2}} + C_2.$

4. $\frac{1}{2k}\ln\left(1 + \frac{kv_0^2}{g}\right)$, где k — коэффициент пропорциональности, отнесенный к единице массы.

§ 4

1. $\ln y = C_1e^x + C_2e^{-x}.$ **2.** $y = -\frac{x}{C_1} + \frac{1 + C_1^2}{C_1^2}\ln|1 + C_1x| + C_2.$

3. $y = 1 - e^x.$ **4.** $y = a\ln\left|\cos\frac{x - C_1}{a}\right| + C_2.$

5. Цепная линия $y = a\operatorname{ch}\frac{x - C_1}{a} + C_2$, где $a = \frac{H}{q}$, H — сила горизонтального натяжения и q — вес погонного метра каната.

6. $T = \sqrt{\frac{l}{g}}\ln\frac{l + \sqrt{l^2 - a^2}}{a} \approx 2{,}3$ сек.

§ 5

1. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x.$ **2.** $y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + C_2\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right).$

3. $y = e^{\frac{x}{2}}(C_1 + C_2x).$ **4.** $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t.$

§ 6

1. 0,45 сек. **2.** $x = 1{,}21e^{-1{,}6t}\sin 4{,}13t$; 1,52 сек.

§ 9

1. $y = C_1 + C_2e^{-2x} - \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right).$

2. $y = 2x.$

3. $y = e^x(C_1\sin x + C_2\cos x) - (\sin x + \cos x).$

4. $y = C_1 \sin 10x + C_2 \cos 10x + \frac{x}{20} \sin 10x$.

5. $x = 1 - 0{,}12 \sin(10\sqrt{g}\,t) + 0{,}01 \cos(10\sqrt{g}\,t) + 0{,}12 \sin 30t$ м.

§ 10

1. $y = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2\pi}$.

2. $y = 1 - \sin x - \cos x$.

3. Решений нет.

4. $y = 2x - \pi + \pi \cos x + C \sin x$, C — произвольное.

Глава IV

§ 3

1. а) линейно зависимы; б) линейно независимы; в) линейно зависимы; г) линейно независимы.

2. $y = x - 2x^2 + x^3$.

§ 5

1. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\right)e^x$.

2. $y = -\frac{1}{4} + \frac{2}{9}x + \frac{1}{36}x^4 - \frac{x}{3}\ln x$.

§ 6

1. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}$.

2. $y = C_1 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(C_2 \cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + C_3 \sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. $y = e^x(C_1 + C_2 x) + C_3 e^{-2x}$.

4. $y = e^{-\frac{x}{2}}\left[(C_1 + C_2 x)\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + (C_3 + C_4 x)\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right]$.

5. $y = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right)$.

§ 7

1. а) $Y = Ax + x(B\cos x + C\sin x)$;

б) $Y = x(Ax^2 + Bx + C)e^x + De^{2x}$;

в) $Y = x^2[(Ax + B)\sin x + (Cx + D)\cos x]$;

г) $Y = xe^{-x}[(Ax^2 + Bx + C)\cos x + (A_1x^2 + B_1x + C_1)\sin x]$.

2. $y = C_1 + C_2x + C_3e^x - \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) + \frac{1}{2}(\cos x - \sin x)$.

3. $y = e^{-x}\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3\right) + x - 3$.

§ 8

1. $y = C_1x^p + C_2x^{-p}$, если $p \neq 0$; $y = C_1 + C_2 \ln x$, если $p = 0$.

2. $y = \frac{1}{x}(C_1 + C_2 \ln x) + \frac{1}{2x}\ln^2 x$.

3. $y = x^3 - x$.

§ 9

1. $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}(t\sqrt{2})$; $y = \operatorname{ch}(t\sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}(t\sqrt{2})$.

2. $x = C_1\cos t + C_2\sin t + C_3\operatorname{ch}t + C_4\operatorname{sh}t$;

$y = -C_1\cos t - C_2\sin t + C_3\operatorname{ch}t + C_4\operatorname{sh}t$.

§ 10

1. $y = \frac{\operatorname{sh}3}{2\operatorname{sh}3 - 3\operatorname{sh}2}e^{2x} - \frac{\operatorname{sh}2}{2\operatorname{sh}3 - 3\operatorname{sh}2}e^{3x} - \frac{\operatorname{sh}1}{2\operatorname{sh}3 - 3\operatorname{sh}2}$.

2. $x(t) = Ce^{2t}\sin t$, $y(t) = -Ce^{2t}\cos t$, C — произвольное.

Ответы к заданиям части II

Глава I

1. $u = \Phi\left(\frac{y^2}{x}, \frac{z^4}{x}\right)$.

2. $u = 2(y^2 - x^2)$.

3. $\Phi\left(\frac{y - x\ln x}{x}, \frac{u}{x}\right) = 0$ или же $u = x\Psi\left(\frac{y - x\ln x}{x}\right)$.

4. $\Phi\left(u, \frac{y - u\ln x}{u}\right) = 0$.

5. $\Phi\left(\frac{x + y + u}{(x - y)^2}, (x - y)(x + y - 2u)\right) = 0$.

Глава II

1. а) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x$.

   б) $f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$.

   в) $f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$.

   г) $f(x) = \frac{A+B}{2} + \frac{2}{\pi}(B - A)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.

   д) $f(x) = \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx$.

3. $f(x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$.

4. а) $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}$.

   б) $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)x$.

в) $f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$.

5. 1) а) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\frac{\sin nx}{n}$;

б) $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}\frac{\cos nx}{n}$.

2) а) $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$;

б) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

7. а) $f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x$.

б) $f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{4n^2-1}\sin nx$.

8. а) $f(x) = \frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\cos nx\right]$.

б) $f(x) = \frac{2h}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{nh}\cos nx\right)$.

9. А) а) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\pi x}{2n+1}$;

б) $f(x) = 1$.

Б) а) $\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}$;

б) $\frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^2}$.

10. а) $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)\pi x.$

б) $f(x) = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{5}.$

11. а) $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda.$

б) $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda.$

в) $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda^2}\cos\lambda x\,d\lambda.$

г) $f(x) = \int_0^{+\infty}e^{-\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda.$

д) $f(x) = \int_0^{+\infty}e^{-\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda.$

е) $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda\pi}{1-\lambda^2}\sin\lambda x\,d\lambda.$

ж) $f(x) = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{\lambda^2+\alpha^2}d\lambda.$

з) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{\frac{-\lambda^2}{4}}\cos\lambda x\,d\lambda.$

и) $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2\lambda\sin\lambda+\cos\lambda-1}{\lambda^2}\cos\lambda x+\frac{\sin\lambda-\lambda}{\lambda^2}\sin\lambda x\right)d\lambda.$

12. а) $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{1+\lambda^2}d\lambda \quad (0\le x<+\infty);$

б) $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{1+\lambda^2}d\lambda \quad (0\le x<+\infty).$

Глава III

1. а) $u(x, y) = F_1(x) + F_2(y)$;

б) $u(x, y) = F_1(x) + F_2(y) + \frac{x^2y^2}{4}$;

в) $u(x, y) = F_1(x) + F_2(y) + \frac{x^2}{2}\ln|y|$;

г) $u(x, y) = F_1(x) + F_2(y)e^{ax}$;

д) $u(x, y) = F_1(x) + F_2(y)e^{\frac{x^3}{3}}$;

е) $u(x, y) = F_1(x) + \frac{F_2(y)}{x}$;

ж) $u(x, y) = xF_1(y) + F_2(y)$.

Здесь F_1 и F_2 — произвольные функции.

2. $u(x, y) = F_1(x + \lambda_1 y) + F_2(x + \lambda_2 y)$, где $\lambda_{1,2}$ — корни уравнения $A + 2B\lambda + C\lambda^2 = 0$.

3. $u(x, y) = F(x^2 + y^2)$, где F — произвольная функция.

4. $u(x,y) = xF\left(\frac{y}{x}\right)$, где F — произвольная функция.

5. а) Гиперболический тип: $\frac{y}{x} = C_1$, $xy = C_2$;

б) Параболический тип: $x + y = C$;

в) Гиперболический тип: $xy = C_1$, $\frac{x^3}{y} = C_2$;

г) Эллиптический тип: $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \pm \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) = C_{1,2}$.

6. а) $\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$; $\xi = \frac{x^2}{2} + y$, $\eta = x$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$; $\xi = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$, $\eta = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$;

в) Уравнение эллиптично всюду, кроме осей координат, состоящих из точек параболичности. Оно приводится заменой $\xi = y^2$, $\eta = x^2$ к каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

7. а) $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0;\ \ \xi = 3x + y,\ \ \eta = x + y;$

$u(x, y) = F_1(3x + y) + F_2(x + y);$

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0;\ \ \xi = xy,\ \ \eta = \frac{y}{x};$

$u(x, y) = F_1\left(\frac{y}{x}\right)\sqrt{2xy} + F_2(xy);$

в) $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = 0;\ \ \xi = \frac{y}{x},\ \ \eta = y;\ \ u(x, y) = yF_1\left(\frac{y}{x}\right) + F_2\left(\frac{y}{x}\right),$

где F_1 и F_2 — произвольные функции.

8. а) $u(x, y) = F_1\left(x - 2\sqrt{y}\right) + F_2\left(x + 2\sqrt{y}\right);$

б) $u(x, y) = yF_1(2x + y) + F_2(2x + y);$

в) $u(x, y) = F_1(x + 2y)e^{-\frac{1}{3}(x-y)} + F_2(x - y);$

г) $u(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y}}F_1(xy) + F_2\left(\frac{y}{x}\right);$

д) $u(x, y) = F_1(x + y - \cos x) + F_2(x - y + \cos x);$

9. а) $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0;\ \ \xi = x,\ \ \eta = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\ \ (y < 0);$

$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0;$

$\xi = x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}},\ \ \eta = x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}\ \ (y < 0);$

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{2\alpha - 1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0;\ \ \xi = x,\ \ \eta = 2\sqrt{y}\ \ (y > 0);$

$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{\xi - \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0;$

$\xi = x - 2\sqrt{-y},\ \ \eta = x + 2\sqrt{-y}\ \ (y < 0).$

10. а) $u(x, y) = F\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right);$

б) $u(x, y) = F_1\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)\sqrt{x^2 + y^2} + F_2\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right);$

в) $u(x, y) = F_1\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + F_2\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$

11. $u(x, y) = 1 + x^2 y + y^2 - 2x^4.$

12. а) $u = 1 + xy + y^2$;

б) $u = y^2 + Bxy + A\sin x$;

в) $u = x^2y^3 + xy + y^2$;

г) $u = Be^x + A - B$.

13. $u(x, y) = 3x^2 + y^2$.

Указание. Общее решение уравнения есть

$u(x, y) = F_1(x + y) + F_2(3x - y)$,

где F_1 и F_2 — произвольные функции.

14. $u(x, y) = \varphi\left(x - \frac{2}{3}y^3\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-\frac{2}{3}y^3}^{x+2y}\psi(z)dz.$

15. $u(x, y) = \dfrac{\varphi(-y + \sin x + x) + \varphi(y - \sin x + x)}{2} + \dfrac{1}{2}\int\limits_{-y+\sin x+x}^{y-\sin x+x}\psi(z)dz.$

Указание. Общее решение уравнения есть

$u(x, y) = F_1(y - \sin x - x) + F_2(y - \sin x + x)$,

где F_1 и F_2 — произвольные функции.

16. $u(x, y) = \frac{3}{4}\varphi\left(x\sqrt[3]{y}\right) + \frac{1}{4}y\varphi\left(\frac{x}{y}\right) +$

$$+ \frac{3}{16}\sqrt[4]{x^3y}\int\limits_{x\sqrt[3]{y}}^{\frac{x}{y}}\varphi(\xi)\xi^{-\frac{7}{4}}d\xi - \frac{3}{4}\sqrt[4]{x^3y}\int\limits_{x\sqrt[3]{y}}^{\frac{x}{y}}\psi(\xi)\xi^{-\frac{7}{4}}d\xi.$$

Глава IV

1. а) $u(x, t) = \sin x \cos t$;

б) $u(x, t) = \frac{A}{a}\sin x \sin at$;

в) $u(x, t) = \frac{e^x}{2}\operatorname{sh}2t$.

9. $u(x, t) = \sin x \cos at$.

10. $u(x, t) = \left(a\cos\frac{\pi at}{l} + \frac{Bl}{\pi a}\sin\frac{\pi at}{l}\right)\sin\frac{\pi x}{l}$.

11. а) $u(x,t) = \frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi}{l}t\sin\frac{\pi}{l}x.$

б) $u(x,t) = \frac{2l}{\pi^2 a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)}{l}\pi at\sin\frac{(2n+1)}{l}\pi x.$

12. $u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)}{l}\pi at\sin\frac{(2n+1)}{l}\pi x.$

13. $u(x,t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 x_0(l-x_0)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n x_0}{l}\cos\frac{\pi nat}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}.$

14. а) $u(x,t) = \frac{8kl}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l};$

б) $u(x,t) = \frac{8v_0 l}{\pi^2 a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$

15. $u(x,t) = Ae^{-\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{2\pi x}{l}.$

16. $u(x,t) = e^{-t}\sin x.$

17. а) $u(x,t) = \frac{12l}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l};$

б) $u(x,t) = \frac{1}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}.$

18. $c(x,t) = c_0\left[\frac{h}{l} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi h}{l}e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\eta t}\cos\frac{n\pi x}{l}\right].$

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \eta\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \qquad (0 < x < l, \quad t > 0)$$

при условиях:

$$c(x,0) = \begin{cases} c_0, & 0 < x < h, \\ 0, & h < x < l; \end{cases} \quad \frac{\partial c}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial c}{\partial x}(l,t) = 0.$$

19. $u(x,t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t}\cos\frac{n\pi x}{l}$,

где $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ \ n=0,1,2,\ldots$.

20. $u(x,t)=u_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}$,

где $A_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx-\frac{2u_0}{n\pi}\left[1+(-1)^{n+1}\right]$.

При $\varphi(x)=u_1$:

$$u(x,t)=u_0+\frac{4(u_1-u_0)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}e^{\frac{-(2k+1)^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}.$$

21. $c(x,t)=\frac{4c_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}e^{-\left(\frac{2n+1}{2l}\right)^2\pi^2\eta t}\cos\frac{(2n+1)}{2l}\pi x$.

При установившемся процессе

$\frac{\partial c}{\partial t}=0$ и $\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}=0$.

Следовательно, $c=Ax+B$, где A и B — постоянные, которые можно определить экспериментально.

22. $u(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}e^{-\left(\frac{2n+1}{2l}\right)^2\pi^2\eta t}\sin\frac{(2n+1)}{2l}\pi x$.

23. Указание. Воспользоваться формулой (3.23) (см. гл. IV, § 3) при $n=0,1,2$.

24. а) $u=A$; б) $u=\frac{A}{R}r\cos\varphi$;

в) $u=\frac{A}{R}r\sin\varphi$; г) $u=A+\frac{B}{R}r\sin\varphi$;

д) $u=\frac{A}{2}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\cos2\varphi\right)+\frac{B}{2}\left(1+\frac{r^2}{R^2}\cos2\varphi\right)$;

е) $u = B + \frac{3A}{4R} r\sin\varphi - \frac{1}{4}A\left(\frac{r}{R}\right)^3 \sin 3\varphi.$

Указание: $\sin^3\varphi = \frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi.$

25. а) $u = A + By$; б) $u = Axy$.

26. $u(r,\varphi) = A\frac{r}{R}\sin\varphi - \frac{8A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\frac{\cos 2n\varphi}{4n^2-9}.$

27. а) $u = x$; б) $u = y$.

28. $u = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}xy^2 + \frac{3}{4}x.$

29. $u(0,0) = 0.$

30. $u\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{2}.$

31. Указание. Искать решение в виде:

$u(r) = C_1 \ln r + C_2,$

где C_1 и C_2 находятся из условий на границе кольца.

Литература

1. *В. В. Степанов*. «Курс дифференциальных уравнений».— Москва: «Физматгиз», 1959.
2. *И. Г. Петровский*. «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений».— Москва: «Наука», 1984.
3. *Л. С. Понтрягин*. «Обыкновенные дифференциальные уравнения».— Москва: «Наука», 1982.
4. *Л. Э. Эльсгольц*. «Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление».— Москва: «УРСС», 1998.
5. *Н. М. Матвеев*. «Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений».— Минск: «Вышейш. шк.», 1974.
6. *А. П. Карташев, Б. Л. Рождественский*. «Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления».— Москва: «Наука», 1980.
7. *Ю. С. Богданов, С. А. Мазаник, Ю. Б. Сыроид*. «Курс дифференциальных уравнений».— Минск: «Унiверсiтэцкае», 1966.
8. *В. К. Романко*. «Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления».— Москва–Санкт-Петербург: «Изд-во ЛБЗ», 2000.
9. *А. К. Боярчук, Г. П. Головач*. «Справочное пособие по высшей математике. Том 5: Дифференциальные уравнения в примерах и задачах».— Москва: «УРСС», 1999.
10. *Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев*. «Краткий курс высшей математики».— Москва: «Астрель–АСТ», 2001.
11. *А. Ф. Филиппов*. «Сборник задач по дифференциальным уравнениям».— Москва–Ижевск: «Изд-во РХД», 2000.
12. *Н. М. Матвеев*. «Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям».— Минск: «Вышейш. шк.», 1987.
13. «Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов» /под редакц. Б. П. Демидовича/.— Москва: «Астрель–АСТ», 2001.
14. *И. Г. Петровский*. «Лекции об уравнениях с частными производными».— Москва: «Наука», 1961.
15. *В. П. Михайлов*. «Дифференциальные уравнения в частных производных».— Москва: «Наука», 1983.

16. *Р. Курант*. «Уравнения с частными производными».— Москва: «Мир», 1964.
17. *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский*. «Уравнения математической физики».— Москва: «Наука», 1972.
18. *С. Л. Соболев*. «Уравнения математической физики».— Москва: «Наука», 1966.
19. *В. С. Владимиров*. «Уравнения математической физики».— Москва: «Наука», 1976.
20. *И. Г. Араманович, В. И. Левин*. «Уравнения математической физики».— Москва: «Наука», 1964.
21. *С. К. Годунов*. «Уравнения математической физики».— Москва: «Наука», 1971.
22. *Ю. С. Очан*. «Методы математической физики».— Москва: «Высш. шк.», 1965.
23. *Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов*. «Сборник задач по математической физике».— Москва: «Наука», 1972.
24. *Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов*. «Уравнения в частных производных математической физики».— Москва: «Высш. шк.», 1970.
25. *М. М. Смирнов*. «Задачи по уравнениям математической физики».— Москва: «Физматгиз», 1961.
26. «Сборник задач по уравнениям математической физики» /под редакц. В. С. Владимирова/.— Москва: «Наука», 1974.
27. *С. К. Годунов, Е. В. Золотарёва*. «Сборник задач по уравнениям математической физики».— Москва: «Наука», 1974.
28. *Ю. С. Очан*. «Сборник задач по методам математической физики».— Москва: «Высш. шк.», 1967.
29. *И. В. Мисюркеев*, «Сборник задач по методам математической физики».— Москва: «Просвещение», 1975.
30. «Сборник задач по математике для втузов. Часть 4: методы оптимизации, уравнения в частных производных, интегральные уравнения» /под редакц. А. В. Ефимова/.— Москва: «Наука», 1990.

Оглавление

Борис Павлович ДЕМИДОВИЧ
Владимир Павлович МОДЕНОВ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
Учебное пособие
Издание второе, исправленное

Генеральный директор *А. Л. Кноп*
Директор издательства *О. В. Смирнова*

ЛР № 065466 от 21.10.97

Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.001665.03.02
от 18.03.2002 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lpbl.spb.ru
www.lanbook.com
www.lanpbl.spb.ru/price.htm
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.

Издательство: тел./факс: (812)567-29-35, 567-05-97, 567-92-72;
pbl@lpbl.spb.ru
print@lpbl.spb.ru

Подписано в печать 01.02.06.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108 $^1/_{32}$.
Печать высокая. Усл. п. л. 15,12. Тираж 1500 экз.

Заказ №   .

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография».
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7.
Качество печати соответствует качеству
предоставленных диапозитивов